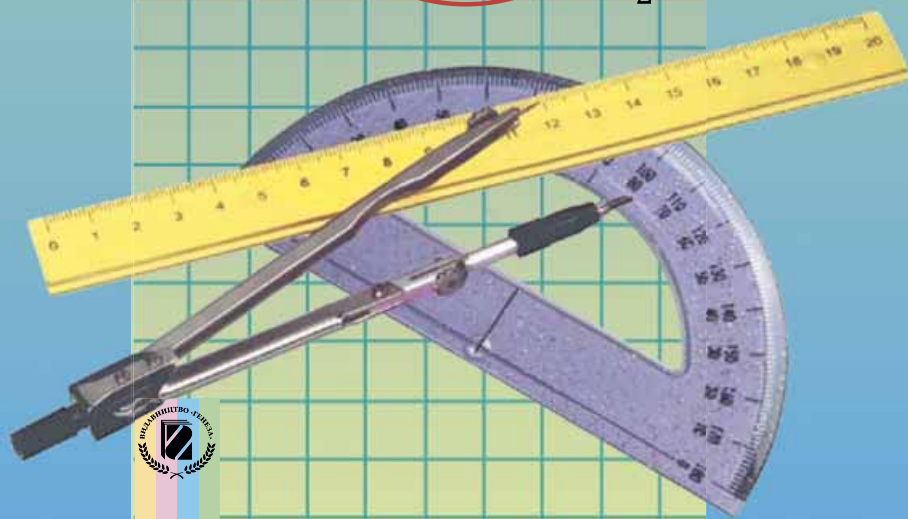
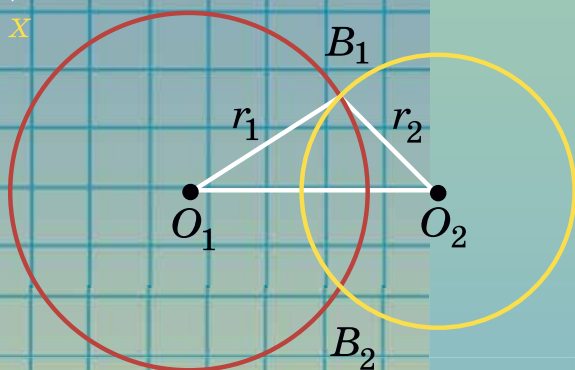
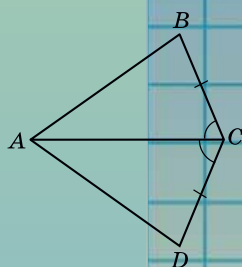
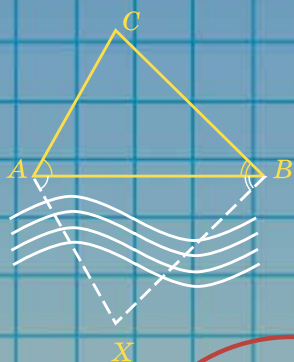


О. С. Істер

ГЕОМЕТРІЯ

7



Геометрія

Істер О. С.

«Геометрія»

підручник для 7 класу загальноосвітніх навчальних закладів

Ви починаєте вивчати одну з найдавніших і найцікавіших наук — **геометрію**. У перекладі з грецької слово *геометрія* означає *землемірство* (*гео* — земля, *метрео* — міряти). Ця назва пояснюється тим, що виникнення геометрії пов'язане з практичною діяльністю людини. Ще давні єгиптяни та греки близько трьох тисяч років тому вміли виконувати різні вимірювання, необхідні для розмічування ділянок, спорудження будівель, прокладання доріг тощо. У процесі практичної діяльності землемірів, будівельників, астрономів, мореплавців, художників поступово склалися правила геометричних вимірювань, побудов та обчислень.

Пізніше завдяки давньогрецьким ученим Фалесу, Піфагору, Евкліду та іншим дедалі більшу роль у геометрії стали відігравати системи міркувань, які давали змогу доводити нові формули і факти на основі вже відомих. На початок нашої ери геометрія вже сформувалася як наука, у якій властивості геометричних фігур вивчають шляхом міркувань.

Отже, геометрія виникла на основі життєдіяльності людини. Спочатку вона використовувалася суто практично, але згодом сформувалася як самостійна математична наука.

Оволодіти матеріалом курсу вам допоможе цей підручник. Він складається із чотирьох розділів, що містять 27 параграфів. Під час вивчення теоретичного матеріалу зверніть увагу на текст, надрукований **жирним шрифтом**. Його треба запам'ятати.

У підручнику ви побачите умовні позначення. Ось що вони означають:



— важливі геометричні твердження (означення, аксіоми, властивості);



— запитання до вивченого теоретичного матеріалу;



— закінчення доведення теореми або задачі;



— «ключова» задача, висновки якої використовуються під час розв'язування інших задач;



— вправи для повторення;



— вправи підвищеної складності;



— рубрика «Цікаві задачі для учнів неледачих».

Чорним кольором позначено номери вправ для розв'язування в класі, а **синім** — для розв'язування вдома.

Усі вправи мають позначення залежно від рівня навчальних досягнень, якому вони відповідають.

Із позначки  починаються вправи початкового рівня;

Із позначки  починаються вправи середнього рівня;

Із позначки  починаються вправи достатнього рівня;

Із позначки  починаються вправи високого рівня.

Перевірити свої знання та підготуватися до тематичного оцінювання ви зможете, якщо виконаєте завдання «Домашньої самостійної роботи», які подано в тестовій формі, та «Завдання для перевірки знань». Після кожного розділу наведено вправи для його повторення, а в кінці підручника — «Завдання для перевірки знань за курс геометрії 7 класу» та «Задачі підвищеної складності». Учням, які цікавляться геометрією, варто розглянути вправи рубрики «Цікаві задачі для учнів неледачих».

Теоретичний матеріал підручника викладено простою, доступною мовою, проілюстровано значною кількістю прикладів. Після вивчення теоретичного матеріалу в школі його обов'язково потрібно доопрацювати вдома.

Підручник містить велику кількість вправ. Більшість із них ви розглянете на уроках і під час домашньої роботи; інші вправи рекомендується розв'язати самостійно.

Бажаю успіхів в опануванні курсу!

Шановні вчителі!

Пропонований підручник містить велику кількість вправ; вправи більшості параграфів подано «із запасом». Тож обирайте їх для використання на уроках та як домашні завдання залежно від поставленої мети, рівня підготовленості учнів, ступеня індивідуалізації тощо. Вправи, що не розглядалися на уроці, можна використати на додаткових, факультативних та індивідуальних заняттях.

Додаткові вправи у «Завданнях для перевірки знань» призначено для учнів, які впоралися з основними завданнями раніше за інших учнів. Правильне їх розв'язання вчитель може оцінити окремо.

Вправи для повторення розділів можна запропонувати учням, наприклад, під час узагальнюючих уроків або під час повторення і систематизації навчального матеріалу в кінці навчального року.

Шановні батьки!

Якщо ваша дитина пропустить один чи кілька уроків у школі, потрібно запропонувати їй самостійно опрацювати цей матеріал за підручником удома. Спочатку дитина має прочитати теоретичний матеріал, який викладено простою, доступною мовою та проілюстровано значною кількістю прикладів. Після цього вона повинна розв'язати вправи, що їй посилені, з розглянутого параграфа.

Упродовж опрацювання дитиною курсу геометрії 7-го класу ви можете пропонувати їй додатково розв'язувати вдома вправи, які не розглянули під час уроку. Це сприятиме якнайкращому засвоєнню навчального матеріалу.

Кожна тема закінчується тематичним оцінюванням. Перед його проведенням запропонуйте дитині розв'язати завдання «Домашньої самостійної роботи», які подано в тестовій формі, та «Завдання для перевірки знань». Це допоможе пригадати основні типи вправ та якісно підготуватися до тематичного оцінювання.



ЕЛЕМЕНТАРНІ ГЕОМЕТРИЧНІ ФІГУРИ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

У цьому розділі ви:

- **пригадаєте** елементарні геометричні фігури: точку, пряму, промінь, кут, відрізок;
- **дізнаєтеся** про основні властивості елементарних геометричних фігур;
- **навчитися** розв'язувати задачі, пов'язані з відрізками та кутами.

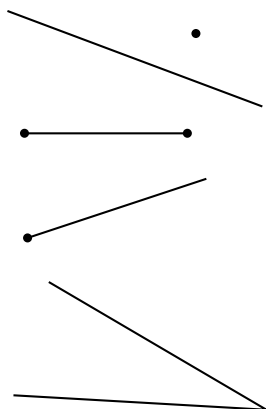


1. ГЕОМЕТРИЧНІ ФІГУРИ. ТОЧКА, ПРЯМА, ПРОМІНЬ

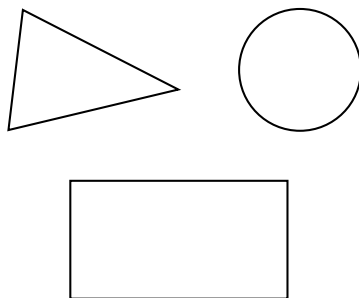
З уроків математики вам уже відомі деякі геометричні фігури: точка, пряма, відрізок, промінь, кут (мал. 1), трикутник, прямокутник, коло (мал. 2). На уроках геометрії ви розширите й поглибите знання про ці фігури, ознайомитеся з іншими важливими фігурами та їх властивостями.

Геометрія — це наука про властивості геометричних фігур.

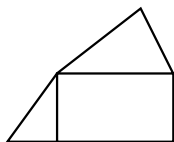
Найпростішою геометричною фігурою є **точка**. Уявлення про точку можна отримати, якщо на аркуш паперу натиснути добре загостреним олівцем або на шкільну дошку — добре загостреним шматком крейди.



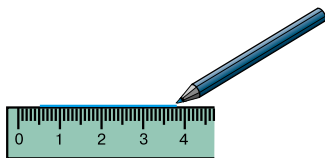
Мал. 1



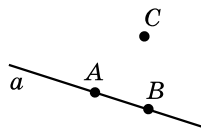
Мал. 2



Мал. 3



Мал. 4



Мал. 5

З точок складаються всі інші геометричні фігури. Отже, будь-яка множина точок є **геометричною фігурою**.

Частина геометричної фігури теж є геометричною фігурою. Геометричною фігурою є й об'єднання кількох геометричних фігур. На малюнку 3 фігура складається з прямокутника і двох трикутників.

Однією з основних геометричних фігур є **площина**. Уявлення про частину площини дає поверхня стола, шибки, стелі тощо. Площину в геометрії вважають рівною та необмеженою; вона не має ані краю, ані товщини. У 7–9-х класах ви опрацювуватимете частину шкільного курсу геометрії — **планіметрію**. Планіметрія вивчає властивості фігур на площині.

Основними геометричними фігурами на площині є **точка** і **пряма**. Прямі можна проводити за допомогою лінійки (мал. 4). При цьому ми зображуємо лише частину прямої, а всю пряму уявляємо нескінченною в обидва боки. Прямі найчастіше позначають маленькими латинськими буквами $a, b, c, d, \dots$, а точки — великими латинськими буквами $A, B, C, D, \dots$

На малюнку 5 зображено пряму a і точки A, B, C . Точки A і B *лежать* на прямій a ; кажуть також, що точки A і B *належать* прямій a або що пряма a *проходить* через точки A і B . Точка C *не лежить* на прямій a ; інакше кажучи, точка C *не належить* прямій a або пряма a *не проходить* через точку C .



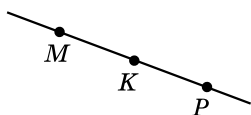
Як б не була пряма, існують точки, які їй належать, і точки, які їй не належать.

Для зручності замість слів «точка A належить прямій a » використовують запис $A \in a$, а замість слів «точка C не належить прямій a » — запис $C \notin a$.

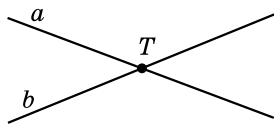
Зауважимо, що через точки A і B не можна провести іншої прямої, яка б не збігалася з прямою a .



Через будь-які дві точки можна провести пряму і до того ж тільки одну.



Мал. 6



Мал. 7



Тут і далі, говорячи про «дві точки», «дві прямі», вважати-мемо, що ці точки, прямі — різні.

Пряму, на якій позначено дві точки, наприклад A і B , можна записати двома буквами: AB або BA . На малюнку 5 точка C не належить прямій AB (це записують так: $C \notin AB$), кажуть також, що *точки A , B і C не лежать на одній прямій*.

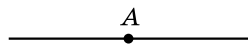
Точки M , K і P лежать на одній прямій (мал. 6), причому точка K лежить між точками M і P .



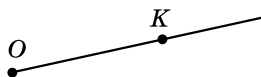
З трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.

Якщо дві прямі мають спільну точку, то кажуть, що вони *перетинаються* в цій точці. На малюнку 7 прямі a і b перетинаються в точці T , а прямі m і n не перетинаються.

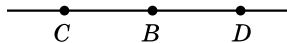
Проведемо пряму та позначимо на ній точку A (мал. 8). Ця точка ділить пряму на дві частини, кожна з яких разом з точкою A називають *променем*, що виходить з точки A . Точка A називається *початком* кожного з променів. Промені позначають двома великими латинськими буквами, перша з яких означає початок променя, а друга — деяку точку на промені (наприклад, промінь OK на малюнку 9).



Мал. 8



Мал. 9



Мал. 10

Два промені, що мають спільний початок і доповнюють один одного до прямої, називають *доповняльними*. На малюнку 10 промінь BC є доповняльним для променя BD , і навпаки, промінь BD є доповняльним для променя BC .



Перші відомості про властивості геометричних фігур люди отримували з практичної діяльності та спостережень за навколишнім світом. Перший твір, що містить найпростіші геометричні відомості про знаходження площ деяких фігур та об'ємів тіл, дійшов до нас із Давнього Єгипту. Він датується XVII ст. до н. е. Описані в цьому творі правила обчислення площ та об'ємів були отримані з практики. Ніяких логічних доведень їх

істинності не наводилося. Самі ж значення площ та об'ємів, обчислені за такими правилами, були приблизними.

Про зародження геометрії у Давньому Єгипті давньогрецький історик Геродот (V ст. до н. е.) писав: «Сезострис, єгипетський фараон, розділив землю, давши кожному єгиптянину ділянку за жеребкуванням, та стягував відповідним чином податок з кожної ділянки. Бувало, що Ніл заливав ту чи іншу ділянку, тоді потерпілий звертався до фараона, а той посилав землемірів, щоб установити, на скільки зменшилася ділянка, і відповідно зменшував податок. Так виникла геометрія в Єгипті, а звідти перейшла в Грецію».

Саме в Давній Греції і відбулося становлення геометрії як науки. Завдяки грецьким геометрам Фалесу, Піфагору, Демокріту (бл. 460–370 рр. до н. е.) відбувся поступовий перехід від практичної до теоретичної геометрії. Ці та інші вчені зробили кроки до строгого обґрунтування геометричних фактів і теорем, збагатили науку численними теоремами, які ми використовуємо й донині.

Таким чином, було створено науку, що вивчає форми, розміри, властивості, взаємне розташування геометричних фігур. Цю науку, як і раніше, називають *геометрією*, хоча її зміст вийшов далеко за межі вчення про вимірювання землі.



Фалес
(бл. 640–548 до н. е.)



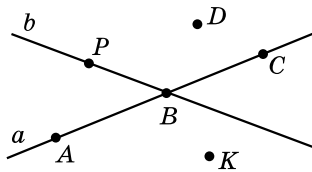
Піфагор
(бл. 580–500 до н. е.)



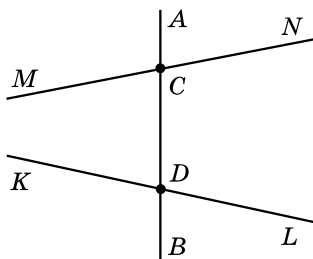
Що вивчає геометрія? ● Наведіть приклади геометричних фігур. ● Назвіть основні геометричні фігури на площині. ● Як позначають прямі та точки? ● Скільки прямих можна провести через дві точки? ● Що таке промінь? ● Як позначають промені? ● Які промені називають доповняльними?

1. Назвіть за малюнком 11:

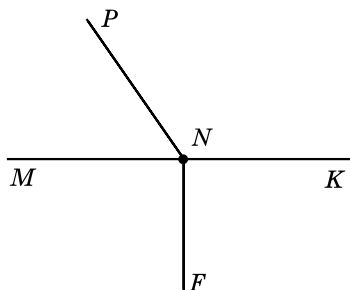
- 1) точки, що належать прямій a ;
- 2) точки, що належать прямій b ;
- 3) точку, що належить і прямій a , і прямій b ;
- 4) точки, що належать прямій a , але не належать прямій b ;
- 5) точки, що не належать ані прямій a , ані прямій b .



Мал. 11



Мал. 12



Мал. 13

2. Позначте в зошиті точки M і N та проведіть через них пряму. Назвіть цю пряму. Позначте точку K , що належить побудованій прямій, та точку L , яка їй не належить. Зробіть відповідні записи.

3. Проведіть пряму a . Позначте дві точки, що належать цій прямій, і дві точки, які їй не належать. Назвіть точки та запишіть взаємне розташування прямої і точок, використовуючи символи $\in$ і $\notin$.

4. На малюнку 12 пряма AB перетинає прямі MN і KL у точках C і D . Запишіть:

- 1) усі промені з початком у точці C ;
- 2) пари доповняльних променів, початок яких — точка D .

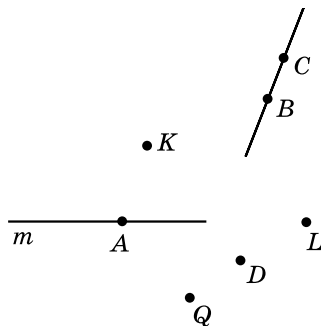
5. 1) Запишіть усі промені, зображені на малюнку 13.
- 2) Чи є серед цих променів пари доповняльних променів?

6. Позначте в зошиті точки M , N , F так, щоб через них можна було провести пряму. Запишіть усі можливі назви цієї прямої.

7. Позначте в зошиті точки B , C і D так, щоб записи CD і CB позначали одну й ту саму пряму. Як ще можна назвати цю пряму?

8. Використовуючи малюнок 14:

- 1) з'ясуйте, чи перетинаються прямі m і CB ;
- 2) запишіть усі точки, які належать прямій m ;
- 3) запишіть усі точки, які належать прямій BC ;
- 4) запишіть точки, які не належать ні прямій m , ні прямій BC .



Мал. 14

9. Позначте в зошиті точки D, E, F, P , як на малюнку 15.

• E

1) Через кожні дві точки проведіть пряму.

• D

Запишіть назви всіх цих прямих.

• F

2) Скільки всього прямих утворилося?

3) На скільки частин ці прямі розбивають площину?

• P

10. Позначте в зошиті три точки A, B і C , що не лежать на одній прямій.

Мал. 15

1) Через кожні дві точки проведіть пряму. Запишіть усі утворені прямі.

2) Скільки всього прямих утворилося?

3) На скільки частин ці прямі розбивають площину?

11. Точка A ділить пряму m на два промені. За якої умови точки B і C цієї прямої належать одному променю; різним променям?



12. На площині проведено три прямі. На першій позначено 2017 точок, на другій — 2018, а на третій — 2019 точок. Яку найменшу загальну кількість точок при цьому може бути позначено?

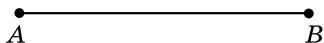


2. ВІДРІЗОК. ВИМІРЮВАННЯ ВІДРІЗКІВ. ВІДСТАНЬ МІЖ ДВОМА ТОЧКАМИ

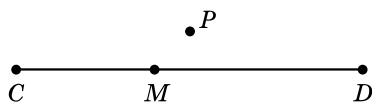


Відрізком називають частину прямої, яка складається з усіх точок цієї прямої, що лежать між двома її точками, разом із цими точками. Ці точки називають *кінцями відрізка*.

На малюнку 16 зображено відрізок AB (його також можна назвати відрізком BA); точки A і B — його кінці. На малюнку 17 точка M належить відрізку CD (її ще називають *внутрішньою точкою* відрізка), а точка P йому не належить.

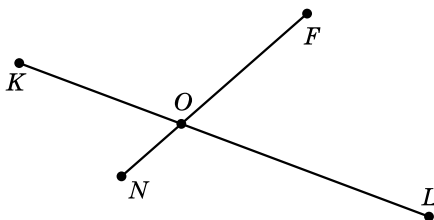


Мал. 16



Мал. 17

На малюнку 18 відрізки KL і FN мають єдину спільну точку O . Кажуть, що відрізки KL і FN *перетинаються* в точці O .

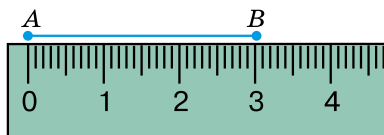


Мал. 18

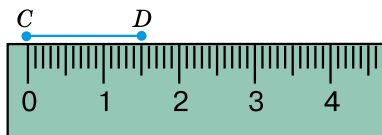
На практиці часто доводиться вимірювати відрізки. Для цього необхідно мати **одичний відрізок** (одиницю вимірювання). Одиницями вимірювання довжини є 1 мм, 1 см, 1 дм, 1 м, 1 км.

Для вимірювання відрізків використовують різні вимірювальні інструменти. Одним з таких інструментів є лінійка з поділками. На малюнку 19 довжина відрізка AB дорівнює 3 см. Коротко кажуть: «Відрізок AB дорівнює 3 см». На малюнку 20 довжина відрізка CD дорівнює 1 см 5 мм, або 1,5 см, або 15 мм. Записують це так:

$$AB = 3 \text{ см}, \quad CD = 1,5 \text{ см} = 15 \text{ мм}.$$



Мал. 19



Мал. 20



Мал. 21



Мал. 22



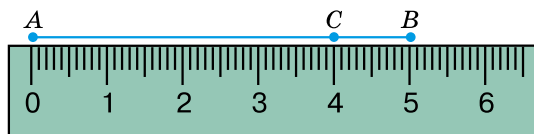
Кожний відрізок має певну довжину, більшу за нуль.

Іншими інструментами, якими можна вимірювати відрізки, є складаний метр (мал. 21), рулетка (мал. 22), клейончастий сантиметр (мал. 23).

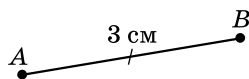
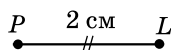
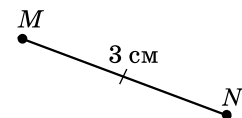
На малюнку 24 зображено відрізок AB . Точка C ділить його на два відрізки: AC і CB (кажуть також, що точка C належить



Мал. 23



Мал. 24



Мал. 25

відрізку AB). Бачимо, що $AC = 4$ см, $CB = 1$ см, $AB = 5$ см. Отже, $AC + CB = AB$.

Маємо основну властивість вимірювання відрізків.



Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою його внутрішньою точкою.

Довжину відрізка називають також *відстанню між його кінцями*. На малюнку 24 відстань між точками A і C дорівнює 4 см.



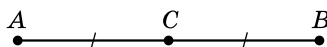
Два відрізки називають *рівними*, якщо рівні їх довжини.

З двох відрізків більшим вважають той, довжина якого більша. На малюнку 25 довжина відрізка MN дорівнює довжині відрізка AB , тому ці відрізки рівні. Можна записати: $MN = AB$. На цьому самому малюнку довжина відрізка MN більша за довжину відрізка PL . Кажуть, що відрізок MN більший за відрізок PL , записують це так: $MN > PL$.

На малюнках рівні відрізки прийнято позначати однакою кількістю рисочок, а відрізки неоднакової довжини — різною кількістю рисочок.

Точку відрізка, яка ділить його навпіл, тобто на два рівні відрізки, називають *серединою відрізка*.

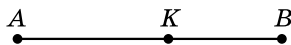
На малюнку 26 $AC = 2$ см, $CB = 2$ см, тому точка C — середина відрізка AB .



Мал. 26

Задача. Точка K належить відрізку AB , довжина якого 15 см. Знайдіть довжини відрізків AK і KB , якщо AK більший за KB на 3 см.

Розв'язання. Розглянемо малюнок 27, на якому точка K належить відрізку AB ; $AB = 15$ см.



Мал. 27

Нехай $KB = x$ см, тоді $AK = (x + 3)$ см.

Оскільки $AK + KB = AB$ (за основною властивістю вимірювання відрізків), маємо рівняння:

$$(x + 3) + x = 15.$$

Розв'яжемо отримане рівняння: $2x + 3 = 15$; $x = 6$ (см).

Отже, $KB = 6$ см, $AK = 6 + 3 = 9$ (см).

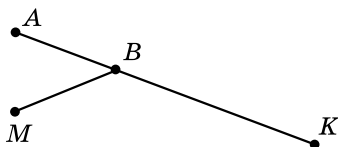
Відповідь. $KB = 6$ см, $AK = 9$ см.



Що називають відрізком? ● Що таке кінці відрізка?

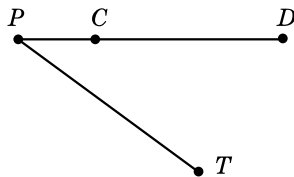
● Які одиниці вимірювання довжини ви знаєте? ● Якими інструментами вимірюють довжини відрізків? ● Що називають відстанню між двома точками? ● Сформулюйте основну властивість вимірювання довжин відрізків. ● Які відрізки називають рівними? ● Яку точку називають серединою відрізка?

13. Назвіть усі відрізки, зображені на малюнку 28. Виміряйте довжини двох з них.



Мал. 28

14. Запишіть усі відрізки, зображені на малюнку 29, та виміряйте довжини трьох з них.



Мал. 29

15. Позначте в зошиті точки C і D та знайдіть відстань між ними.

16. Накресліть відрізки AB і MN так, щоб $AB = 7$ см 2 мм, $MN = 6$ см 3 мм. Порівняйте довжини відрізків AB і MN .

17. Накресліть відрізки KL і FP так, щоб $KL = 5$ см 9 мм, $FP = 6$ см 8 мм. Порівняйте довжини відрізків KL і FP .

18. Точка C лежить між точками A і B (мал. 30). Знайдіть:



Мал. 30

1) AB , якщо $AC = 5$ см, $CB = 2$ см;

2) BC , якщо $AB = 12$ дм, $AC = 9$ дм.

19. Точка K лежить між точками P і Q (мал. 31). Знайдіть:



Мал. 31

1) PQ , якщо $PK = 3$ дм, $KQ = 7$ дм;

2) PK , якщо $PQ = 8$ см, $KQ = 6$ см.

20. Чи лежать точки K , L і M на одній прямій, якщо:

1) $KL = 8$ см, $LM = 3$ см, $KM = 11$ см;

2) $KL = 5$ см, $LM = 9$ см, $KM = 8$ см?

У разі позитивної відповіді вкажіть, яка з точок лежить між двома іншими.

21. Чи лежать точки A , B і C на одній прямій, якщо:

1) $AB = 7$ см, $BC = 3$ см, $AC = 9$ см;

2) $AB = 5$ см, $BC = 2$ см, $AC = 7$ см?

У разі позитивної відповіді вкажіть, яка з точок лежить між двома іншими.

3 22. На прямій позначено точки P , L і M , причому $PL = 42$ мм, $PM = 3$ см 2 мм, $LM = 0,74$ дм. Яка з точок лежить між двома іншими? Відповідь обґрунтуйте.

23. Чи лежать точки A , B і C на одній прямій, якщо $AB = 12$ см, $BC = 1,5$ дм, $AC = 40$ мм?

24. На малюнку 32 довжини відрізків AB і CD однакові. Обґрунтуйте, чому $AC = BD$.



Мал. 32

25. На малюнку 32 довжини відрізків AC і BD однакові. Обґрунтуйте, чому $AB = CD$.

26. Точки C і D належать відрізку AB . Знайдіть довжину відрізка CD , якщо $AB = 40$ см, $AC = 25$ см, $BD = 32$ см.

27. Точки M і N належать відрізку CD . Знайдіть довжину відрізка CD , якщо $MN = 50$ см, $MC = 40$ см, $ND = 16$ см.

4 28. Точка C належить відрізку $AB = 7,6$ дм. Визначте довжини відрізків AC і BC , якщо: 1) AC втричі менший від BC ; 2) AC більший за BC на 2,8 дм.

29. Точка M належить відрізку $CD = 8,4$ см. Визначте довжини відрізків CM і DM , якщо: 1) CM більший за DM на 0,6 см; 2) $CM : DM = 1 : 3$.

30. Точки C , D і M лежать на одній прямій. Знайдіть відстань між точками C і D , якщо відстань між точками C і M дорівнює 5,2 см, а відстань між точками D і M — 4,9 см. Скільки розв'язків має задача?

31. На прямій позначено точки A , M і N , причому $AM = 7,2$ см, $MN = 2,5$ см. Знайдіть відстань між точками A і N . Скільки розв'язків має задача?



32. Розділіть трикутник двома прямими на:

1) два трикутники і один чотирикутник;

2) два трикутники, один чотирикутник і один п'ятикутник.



3. КУТ. ВИМІРЮВАННЯ КУТІВ. БІСЕКТРИСА КУТА

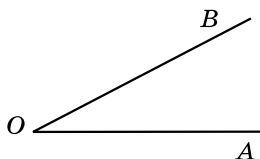


Кут — це геометрична фігура, яка складається з двох променів, що виходять з однієї точки.

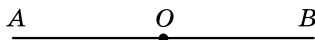
Промені називають **сторонами кута**, а їх спільний початок — **вершиною кута**.

На малюнку 33 зображено кут з вершиною O і сторонами OA і OB . Такий кут можна назвати по-різному: кут O , або кут AOB , або кут BOA . У другому та третьому варіантах назви кута буква O , що позначає його вершину, ставиться посередині. Слово «кут» можна замінити знаком $\angle$, записавши кут O так: $\angle O$, або $\angle AOB$, або $\angle BOA$.

Розгорнутий кут — це кут, сторони якого є доповняльними променями (мал. 34).

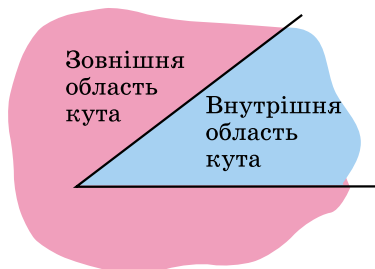


Мал. 33

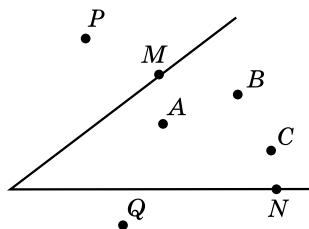


Мал. 34

Будь-який кут ділить площину на дві частини. Якщо кут не є розгорнутим, то одну із частин називають **внутрішньою областю** кута, а іншу — **зовнішньою** (мал. 35). На малюнку 36 точки A , B і C належать внутрішній області кута (лежать у середині кута), точки M і N належать сторонам кута, а точки P і Q належать зовнішній області кута (лежать поза кутом). Якщо кут є розгорнутим, то будь-яку з двох частин, на які він ділить площину, можна вважати внутрішньою областю кута.

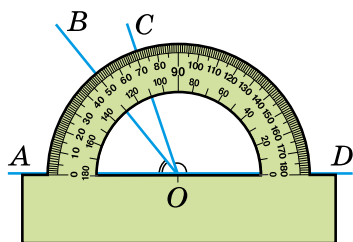


Мал. 35



Мал. 36

За одиницю вимірювання кутів приймають *градус* — кут, який становить $\frac{1}{180}$ розгорнутого кута. Позначають градус знаком $^{\circ}$. Для вимірювання кутів використовують *транспортир* — інструмент, який ви знаєте з молодших класів.



Мал. 37

На малюнку 37 градусна міра кута AOB дорівнює 50° , а кута COD — 110° . Коротко кажуть: кут AOB дорівнює 50° , кут COD дорівнює 110° ; записують так: $\angle AOB = 50^{\circ}$, $\angle COD = 110^{\circ}$.



Кожний кут має певну градусну міру, більшу за нуль. Розгорнутий кут дорівнює 180° .

Дуже малі кути вимірюють у хвилинах і секундах. *Хвилина* — це $\frac{1}{60}$ частина градуса, *секунда* — $\frac{1}{60}$ частина хвилини. Хвилини позначають знаком $'$, секунди — знаком $''$. Отже, $1^{\circ} = 60'$, $1' = 60''$.

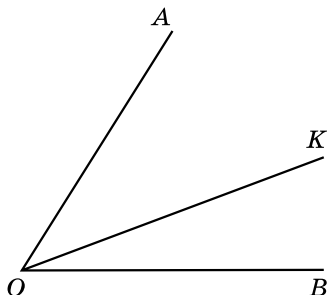
На місцевості кути вимірюють *астролябією* (мал. 38).



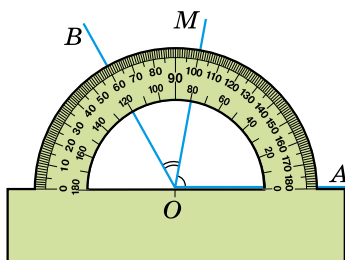
Мал. 38

Будемо вважати, що промінь OK *проходить між сторонами кута AOB* , якщо він виходить з його вершини і лежить у його внутрішній області (мал. 39).

На малюнку 40 промінь OM проходить між сторонами кута AOB і ділить його на два кути: BOM і MOA . Бачимо, що $\angle BOM = 40^{\circ}$, $\angle MOA = 80^{\circ}$, $\angle AOB = 120^{\circ}$. Отже, $\angle AOB = \angle BOM + \angle MOA$.



Мал. 39



Мал. 40

Маємо основну властивість вимірювання кутів.



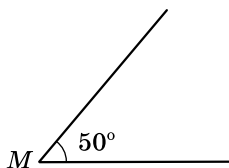
Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами.

З'ясуємо, як порівнювати кути.

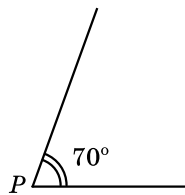
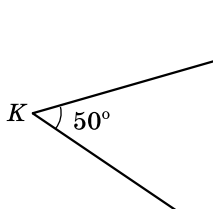


Два кути називають *рівними*, якщо в них однакові градусні міри.

З двох кутів більшим вважають той, градусна міра якого є більшою. На малюнку 41 градусна міра кута M дорівнює 50° , градусна міра кута K також дорівнює 50° . Тому ці кути рівні. Можна записати: $\angle M = \angle K$. На малюнку 42 градусна міра кута P дорівнює 70° , тому кут P більший за кут M . Записують це так: $\angle P > \angle M$. На малюнках рівні кути прийнято позначати однаковою кількістю дужок при вершині, а якщо кути не є рівними, — різною кількістю дужок.

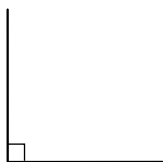


Мал. 41

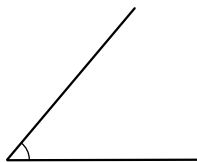


Мал. 42

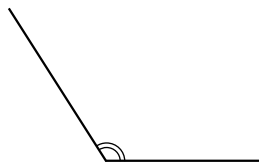
Кут називають **прямим**, якщо його градусна міра дорівнює 90° , **гострим**, якщо він менший від прямого, **тупим**, якщо він більший за прямий, але менший від розгорнутого (мал. 43). Прямий кут на малюнках позначають знаком $\square$.



Прямий



Гострий



Тупий

Мал. 43



Бісектрисою кута називають промінь, який виходить з його вершини і ділить кут навпіл.

На малюнку 44 промінь OP — бісектриса кута AOB .

Задача. $\angle ABC = 100^\circ$, BK — бісектриса кута ABC , а BL — бісектриса кута KBC . Знайти $\angle ABL$.

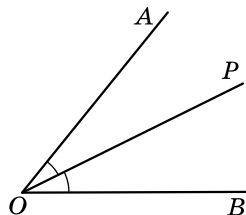
Розв'язання. Розглянемо мал. 45.

$$1) \angle KBC = \frac{\angle ABC}{2} = \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ;$$

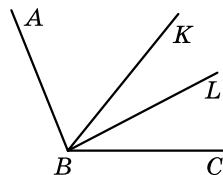
$$2) \angle LBC = \frac{\angle KBC}{2} = \frac{50^\circ}{2} = 25^\circ;$$

$$3) \angle ABL = \angle ABC - \angle LBC = 100^\circ - 25^\circ = 75^\circ.$$

Відповідь. 75° .



Мал. 44

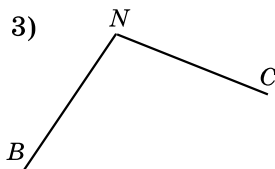
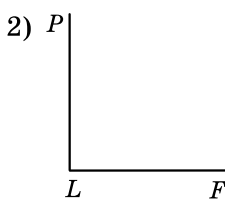
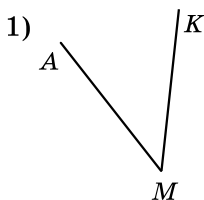


Мал. 45



Яку фігуру називають кутом? ● Як позначають кут? ● Що таке вершина кута; сторона кута? ● Який кут називають розгорнутим? ● Якими інструментами вимірюють кути? ● У яких одиницях вимірюють кути? ● Що означає вираз: «Промінь проходить між сторонами кута»? ● Сформулюйте основну властивість вимірювання кутів. ● Які кути називають рівними? ● Який кут називають прямим; гострим; тупим? ● Який промінь називають бісектрисою кута?

33. Назвіть вершини і сторони кутів, зображених на малюнку 46.



Мал. 46

34. Запишіть вершину і сторони кута: 1) MOP ; 2) BLK .

35. Який з даних кутів гострий, тупий, прямий, розгорнутий:

1) $\angle A = 39^\circ$;

2) $\angle B = 90^\circ$;

3) $\angle C = 91^\circ$;

4) $\angle D = 170^\circ$;

5) $\angle M = 180^\circ$;

6) $\angle Q = 79^\circ$;

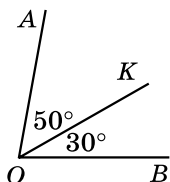
7) $\angle P = 1^\circ 3'$;

8) $\angle F = 173^\circ 12'$?

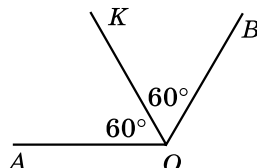
36. Випишіть, які з даних кутів гострі, тупі, прямі, розгорнуті:

- 1) $\angle K = 121^\circ$; 2) $\angle A = 90^\circ$;
 3) $\angle L = 12^\circ$; 4) $\angle E = 180^\circ$;
 5) $\angle M = 89^\circ$; 6) $\angle N = 93^\circ 12'$.

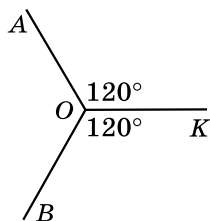
37. (Усно) Чи є промінь OK бісектрисою кута AOB (мал. 47–49)?



Мал. 47



Мал. 48

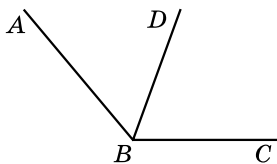


Мал. 49

38. За малюнком 50:

- 1) запишіть усі зображені кути;
 2) користуючись транспортиром, знайдіть градусні міри деяких двох з них;
 3) обчисліть градусну міру третього кута.

39. Користуючись транспортиром, знайдіть градусні міри кутів, зображених на малюнку 46. Визначте вид кожного з них.



Мал. 50

40. Накресліть кут градусної міри:

- 1) 30° ; 2) 90° ; 3) 115° ; 4) 75° .

41. Накресліть кут, градусна міра якого:

- 1) 65° ; 2) 100° ; 3) 20° ; 4) 155° .

42. Накресліть кут, градусна міра якого дорівнює 140° , та проведіть його бісектрису.

43. Накресліть кут, градусна міра якого дорівнює 50° , та проведіть його бісектрису.

44. Виконайте дії:

- 1) $7^\circ 13' + 12^\circ 49'$; 2) $52^\circ 17' - 45^\circ 27'$.

45. 1) Виразіть у мінутах: 4° ; $2^\circ 15'$.

2) Виразіть у секундах: $5'$; $2'$; $1^\circ 3'$.

46. Промінь OK проходить між сторонами кута BOC . Знайдіть градусну міру кута BOC , якщо $\angle BOK = 38^\circ$, $\angle KOC = 42^\circ$. Виконайте малюнок.

47. Промінь PC проходить між сторонами кута APB . Знайдіть градусну міру кута CPB , якщо $\angle APB = 108^\circ$, $\angle APC = 68^\circ$. Виконайте малюнок.

48. Чи проходить промінь BK між сторонами кута ABC , якщо $\angle ABC = 52^\circ$, $\angle ABK = 57^\circ$? Відповідь обґрунтуйте.

49. Знайдіть градусні міри кутів між годинною та хвилинною стрілками годинника:

- 1) о 18 год; 2) о 3 год;
3) о 1 год; 4) о 20 год.

50. Знайдіть градусну міру кута між годинною та хвилинною стрілками годинника:

- 1) о 21 год; 2) о 6 год;
3) о 19 год; 4) о 2 год.

51. Промінь OC ділить кут AOB на два кути. Знайдіть градусну міру кута BOC , якщо $\angle AOB = 60^\circ$ і $\angle AOC = \frac{2}{3} \angle AOB$.

52. Промінь AB ділить кут MAK на два кути. Знайдіть градусну міру кута MAK , якщо $\angle MAB = 70^\circ$, а кут BAK складає 60 % від кута MAB .

53. Кут між бісектрисою кута і продовженням однієї з його сторін за вершину кута дорівнює 142° . Знайдіть градусну міру цього кута.

54. Який кут утворює бісектриса кута 98° з продовженням однієї з його сторін за вершину кута?

55. $\angle MQB = 120^\circ$. Між сторонами кута проходить промінь QP так, що кут PQB у 4 рази менший від кута MQP . Знайдіть кути PQB і MQP .

56. Промінь AC проходить між сторонами кута MAN , який дорівнює 86° . Знайдіть кути MAC і CAN , якщо кут MAC більший за кут CAN на 14° .

57. Розгорнутий кут AOB променями OK і OL поділено на три кути так, що $\angle AOK = 140^\circ$, $\angle BOL = 100^\circ$. Знайдіть градусну міру кута LOK .

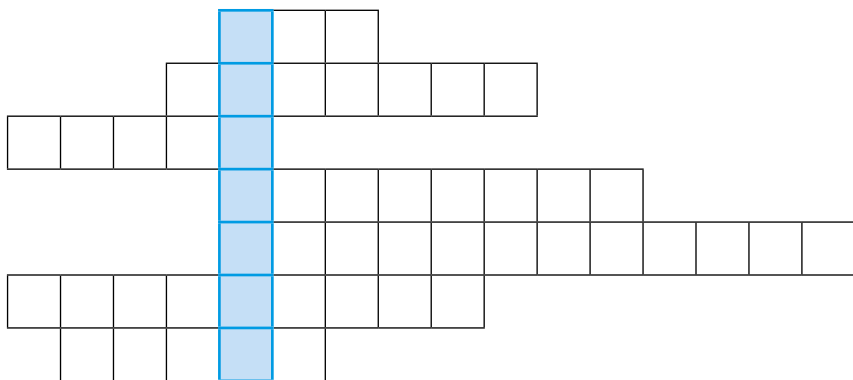
58. Прямий кут COD променями OM і ON поділено на три кути так, що $\angle CON = 70^\circ$, $\angle MOD = 80^\circ$. Знайдіть градусну міру кута MON .



59. 1) Пригадайте назви геометричних фігур, які ви розглянули в цьому розділі, і фігур, які відомі вам з попередніх класів. Запишіть їхні назви в рядках (див. с. 22).

Якщо назви фігур записано правильно, то у виділеному стовпчику можна прочитати прізвище видатного українського математика.

2) Знайдіть у літературі чи Інтернеті відомості про життєвий і творчий шлях цього математика.



Вправи для повторення розділу 1

До § 1

60. За малюнком 51 укажіть:

- 1) точку перетину прямих a і b ;
- 2) які точки належать прямій c ;
- 3) чи належить точка M прямій PL ;
- 4) як інакше можна назвати пряму b .

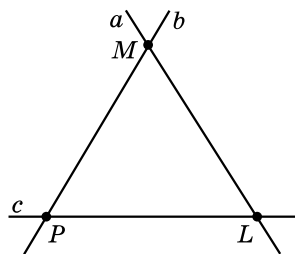
61. 1) Побудуйте промені OK , OM і ON так, щоб промінь OM був доповняльним для променя ON .

2) Побудуйте промені OA , OB і OC так, щоб серед побудованих променів не було жодної пари доповняльних.

62. Позначте точки A , B і C так, щоб записи AB і AC означали дві різні прямі.

63. Одна з двох прямих, що перетинаються, проходить через точку M , яка належить іншій прямій. Що можна сказати про точку M і точку перетину цих прямих?

64. Точки A і B належать прямій l . Пряма m відмінна від прямої l і проходить через точку A . Чи може точка B належати прямій m ? Відповідь обґрунтуйте.



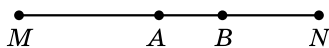
Мал. 51

До § 2

65. 1) Позначте в зошиті точки A , B і C , які не лежать на одній прямій, та знайдіть відстані між кожною парою точок.
2) Позначте в зошиті точки D , E і F , які лежать на одній прямій, та знайдіть відстані між кожною парою точок.

66. Накресліть відрізок $KL = 6$ см 8 мм. Позначте на ньому точку P так, що $KP = 43$ мм. Знайдіть довжину відрізка LP за допомогою обчислень.

67. Сумою яких двох відрізків є відрізок MN (мал. 52)? Розгляньте всі можливі випадки.



Мал. 52

68. 1) Три прямі перетинають відрізок AB , причому жодна з точок перетину прямих і відрізка не збігається з кінцями відрізка. На скільки частин ці точки можуть поділити відрізок?
2) На скільки частин поділиться відрізок, якщо кількість прямих дорівнює n .

69. Точка C — середина відрізка AB , точка D — середина відрізка AC . Знайдіть:

1) AC , CB , AD і DB , якщо $AB = 20$ см;

2) AB , AC , AD і DB , якщо $BC = 12$ дм.

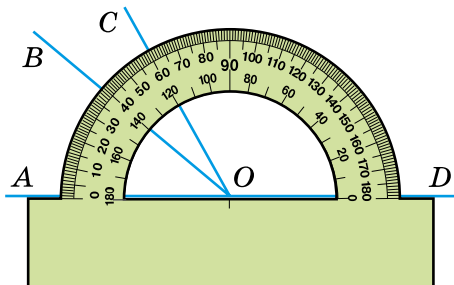
70. Точки M і N належать відрітку CD . $CD = 15$ см, $CM = 12$ см, $DN = 11$ см. Знайдіть довжину відрізка NM .

71. Точка P належить відрітку AB . На прямій AB позначте таку точку C , що $BC = \frac{AP}{2}$. Скільки розв'язків має задача?

72. Точка K належить відрітку CD , довжина якого a см. Знайдіть відстань між серединами відрізків CK і KD .

До § 3

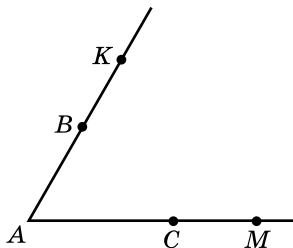
73. Знайдіть градусні міри кутів, зображених на малюнку 53.



Мал. 53

74. Два учні накреслили кути по 70° . Один з учнів сказав, що в нього кут більший, оскільки сторони його кута мають більшу довжину. Чи правий цей учень?

75. Використовуючи малюнок 54, укажіть усі можливі назви кута з вершиною A з даних: KAC , BAM , CAM , KMA , BAC , AKM , ABC , MAK , KAM , CAK .



Мал. 54

76. Накресліть один гострий кут і один тупий. Побудуйте бісектриси цих кутів за допомогою транспортира.

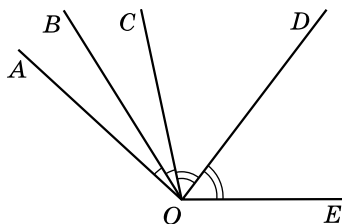
77. 1) На який кут повертається хвилинна стрілка годинника протягом 15 хв; 7 хв; 23 хв?
2) На який кут повертається годинна стрілка годинника протягом 1 хв; 6 хв; 40 хв?

78. OK — бісектриса кута AOB , OL — бісектриса кута KOB . Знайдіть:

- 1) $\angle LOK$, якщо $\angle AOB = 120^\circ$;
- 2) $\angle AOB$, якщо $\angle LOB = 37^\circ$.

79. $\angle AOB = \angle BOC$, $\angle COD = \angle DOE$ (мал. 55). Знайдіть:

- 1) $\angle BOD$, якщо $\angle AOE = 140^\circ$;
- 2) $\angle AOE$, якщо $\angle BOD = 73^\circ$.



Мал. 55

80. $\angle AOB = 168^\circ$, промінь OM проходить між його сторонами. $\angle AOM : \angle MOB = 3 : 4$. Знайдіть ці кути.

Розділ 2

ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМИХ НА ПЛОЩИНІ

У цьому розділі ви:

- **пригадаєте** паралельні та перпендикулярні прямі;
- **дізнаєтеся**, що таке аксіома, теорема, означення, ознака, наслідок; суміжні і вертикальні кути; кут між двома прямими; кути, що утворилися при перетині двох прямих січною;
- **навчитеся** зображувати паралельні та перпендикулярні прямі за допомогою косинця і лінійки; застосовувати властивості суміжних і вертикальних кутів та кутів, що утворилися при перетині паралельних прямих січною, до розв'язування задач; доводити теореми.

§ 4. АКсіОМИ, ТЕОРЕМИ, ОЗНАЧЕННЯ

Аксіоми геометрії — це твердження про основні властивості найпростіших геометричних фігур, прийняті як початкові положення.

У перекладі з грецької слово *аксіома* означає *прийняте положення*.

Нагадаємо деякі вже відомі вам аксіоми.



- I. Яка б не була пряма, існують точки, які їй належать, і точки, які їй не належать.
- II. Через будь-які дві точки можна провести пряму і до того ж тільки одну.
- III. З трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.
- IV. Кожний відрізок має певну довжину, більшу за нуль.
- V. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою його внутрішньою точкою.
- VI. Кожний кут має певну градусну міру, більшу за нуль. Розгорнутий кут дорівнює 180° .
- VII. Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами.

Математичне твердження, справедливість якого встановлюється за допомогою міркувань, називають **теоре́мою**, а саме міркування називають **доведенням теореми**.

Кожна теорема містить **умову** (те, що дано) і **висновок** (те, що необхідно довести). Умову теореми прийнято записувати після слова «дано», а висновок — після слова «довести». Доводячи теорему, можна користуватися аксіомами, а також раніше доведеними теоремами. Ніякі інші властивості геометричних фігур (навіть якщо вони здаються нам очевидними) використовувати не можна.

Твердження, у якому пояснюється зміст певного поняття (термін), називають **означенням**. Ви вже знаєте деякі означення, наприклад означення відрізка, кута, бісектриси кута.

А ще раніше...

Давньогрецький учений Евклід у своїй видатній праці «Основи» зібрав і узагальнив багаторічний науковий досвід. Головним здобутком Евкліда було те, що він запропонував і розвинув аксіоматичний підхід до побудови курсу геометрії. Цей підхід полягає в тому, що спочатку формулюються основні положення (аксіоми), а потім на їх основі за допомогою логічних міркувань доводять інші твердження (теореми). Такий підхід до побудови курсу геометрії використовують і досі, формулюючи деякі з аксіом Евкліда в більш сучасному вигляді.

«Основи» згодом було перекладено на більшість європейських мов. У 1880 р. видатний український математик Михайло Єгорович Ващенко-Захарченко опублікував переклад «Основ», додавши пояснення інших питань геометрії (зокрема, геометрії Лобачевського).

Саму науку, викладену в «Основах», називають **евклідовою геометрією**.

Значний внесок у розвиток геометрії зробили й інші давньогрецькі вчені, зокрема *Архімед* (бл. 287–212 рр. до н. е.) та *Аполлоній* (III ст. до н. е.).

Аналіз системи аксіом, запропонованих Евклідом, тривав не одне століття. Його на межі XIX і XX ст. завершив видатний німецький математик Давид Гільберт (1862–1943). Він створив повну і несуперечливу систему аксіом геометрії Евкліда.



Евклід
(III ст. до н. е.)



М.Є. Ващенко-Захарченко
(1825–1912)



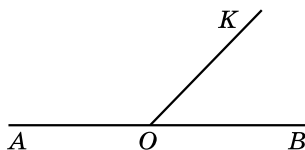
Що таке аксіома? ● Наведіть приклади аксіом. ● Що таке теорема; доведення теореми? ● Що таке означення?

§ 5. СУМІЖНІ КУТИ



Два кути називають *суміжними*, якщо одна сторона в них є спільною, а дві інші сторони цих кутів є доповняльними променями.

На малюнку 56 кути $\angle AOK$ і $\angle KOB$ — суміжні, сторона OK у них — спільна, а OA і OB є доповняльними променями.



Мал. 56

Т е о р е м а (властивість суміжних кутів). Сума суміжних кутів дорівнює 180° .

Д о в е д е н н я. Нехай $\angle AOK$ і $\angle KOB$ — суміжні кути (мал. 56). Оскільки промені OA і OB утворюють розгорнутий кут, то $\angle AOK + \angle KOB = \angle AOB = 180^\circ$. Отже, сума суміжних кутів дорівнює 180° . Теорему доведено. ▲

Твердження, які випливають безпосередньо з аксіом чи теорем, називають *наслідками*. Розглянемо наслідки з доведеної теореми.

Н а с л і д о к 1. Кут, суміжний з прямим кутом, — **прямий**.

Н а с л і д о к 2. Кут, суміжний з гострим кутом, — **тупий**, кут суміжний з тупим кутом, — **гострий**.

Задача. Знайти градусну міру кожного із суміжних кутів, якщо один з них на 56° більший за другий.

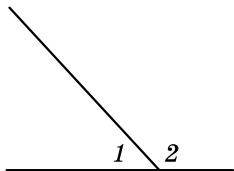
Р о з в ' я з а н н я. Для зручності записів позначимо менший з даних кутів — $\angle 1$, а більший — $\angle 2$. Нехай $\angle 1 = x^\circ$, тоді $\angle 2 = x^\circ + 56^\circ$. Оскільки $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ (за властивістю суміжних кутів), маємо рівняння: $x + x + 56 = 180$, звідки $x = 62^\circ$. Отже, один із шуканих кутів дорівнює 62° , а другий $62^\circ + 56^\circ = 118^\circ$.

В і д п о в і д ь. 62° ; 118° .

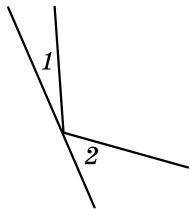


Які кути називають суміжними? ● Сформулюйте і доведіть теорему про властивість суміжних кутів.

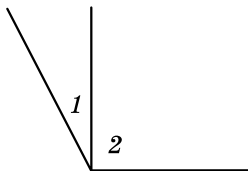
81. (Усно) На яких з малюнків 57–60 кути 1 і 2 є суміжними?



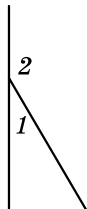
Мал. 57



Мал. 58



Мал. 59



Мал. 60

82. Чи можуть два суміжних кути дорівнювати:

- 1) 42° і 148° ; 2) 90° і 90° ;
3) 166° і 14° ; 4) 23° і 156° ?

83. Чи можуть два суміжних кути дорівнювати:

- 1) 13° і 167° ; 2) 5° і 165° ;
3) 11° і 179° ; 4) 91° і 89° ?

84. Знайдіть кут, суміжний з кутом:

- 1) 15° ; 2) 113° .

85. Знайдіть кут, суміжний з кутом:

- 1) 127° ; 2) 39° .

86. Накресліть за допомогою транспортира $\angle MON = 50^\circ$. Побудуйте суміжний з ним кут за умови, що ON — їх спільна сторона. Обчисліть його градусну міру.

87. Накресліть за допомогою транспортира $\angle APB = 115^\circ$. Побудуйте суміжний з ним кут за умови, що PA — їх спільна сторона. Обчисліть його градусну міру.

88. Промінь, що проходить між сторонами кута, ділить його на кути, що дорівнюють 15° і 72° . Знайдіть градусну міру кута, суміжного з даним.

89. Бісектриса кута M утворює з його стороною кут, що дорівнює 36° . Знайдіть градусну міру кута, який суміжний з кутом M .

90. Накресліть два суміжних кути так, щоб їх спільна сторона була вертикальною, а градусні міри — неоднаковими.

91. Накресліть два суміжних кути різної градусної міри так, щоб їх спільна сторона була горизонтальною.



92. Якщо суміжні кути рівні, то вони прямі. Доведіть це твердження.

93. Якщо кути рівні, то й суміжні з ними кути рівні. Доведіть це твердження.

- 94.** Знайдіть суміжні кути, якщо один з них на 18° менший від іншого.
- 95.** Знайдіть суміжні кути, якщо один з них утричі більший за інший.
- 96.** Знайдіть суміжні кути, якщо один з них складає $\frac{3}{7}$ від іншого.
- 97.** Дано тупий кут A і гострий кут B , градусні міри яких відносяться як $4 : 3$. Знайдіть градусні міри цих кутів, якщо кут, суміжний з одним з них, дорівнює 80° .
- 98.** Знайдіть кут між бісектрисами суміжних кутів.
- 99.** Два кути відносяться як $1 : 2$, а суміжні з ними — як $7 : 5$. Знайдіть дані кути.
- 100.** Один з двох даних кутів на 20° більший за другий, а суміжні з ними відносяться як $5 : 6$. Знайдіть дані кути.
- 101.** Один із суміжних кутів удвічі більший за різницю цих кутів. Знайдіть ці кути.



- 102.** Накресліть кут, градусна міра якого дорівнює:
1) 27° ; 2) 119° .

- 103.** Точки A , B і C лежать на одній прямій; $AB = 2,7$ см, $BC = 3,6$ см. Чи може відстань між точками A і C дорівнювати:

- 1) 0,8 см; 2) 0,9 см; 3) 1 см;
4) 6,1 см; 5) 6,3 см; 6) 6,5 см?



- 104. Анаграми.** У цій задачі треба розшифрувати кожний запис, переставивши букви в ньому так, щоб отримати відоме слово. Такі перестановки називають анаграмами. Наприклад, розв'язати анаграму ВДАКТАР означає знайти слово, складене з даних букв, — це КВАДРАТ.

Розв'яжіть анаграми:

- 1) ТУК; 2) АРЯМП; 3) КЛЕІВД; 4) МОРТЕІЯГЕ.



6. ВЕРТИКАЛЬНІ КУТИ. КУТ МІЖ ДВОМА ПРЯМИМИ, ЩО ПЕРЕТИНАЮТЬСЯ



Два кути називають *вертикальними*, якщо сторони одного з них є доповняльними променями сторін другого.

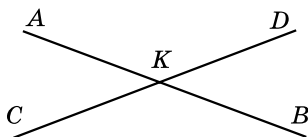
На малюнку 61 прямі AB і CD перетинаються в точці K . Кути AKC і DKB — вертикальні, кути AKD і CKB теж вертикальні.

Т е о р е м а (властивість вертикальних кутів). Вертикальні кути рівні.

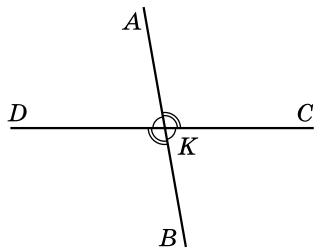
Д о в е д е н н я. Нехай $\angle AKC$ і $\angle DKB$ — вертикальні кути (мал. 61). Оскільки кути $\angle AKC$ і $\angle AKD$ суміжні, то $\angle AKC + \angle AKD = 180^\circ$. Також суміжні кути $\angle AKD$ і $\angle DKB$, тому $\angle AKD + \angle DKB = 180^\circ$. Маємо:

$$\angle AKC = 180^\circ - \angle AKD \text{ і } \angle DKB = 180^\circ - \angle AKD.$$

Праві частини цих рівностей рівні, тому рівними є і ліві їх частини. Отже, $\angle AKC = \angle DKB$. Теорему доведено. $\blacktriangle$



Мал. 61



Мал. 62

Задача. Два із чотирьох кутів, що утворилися при перетині двох прямих, відносяться як 4 : 5. Знайти градусну міру кожного з кутів, що утворилися.

Р о з в ' я з а н н я. Кожні два кути, які утворилися в результаті перетину двох прямих, є або суміжними, або вертикальними (мал. 62). Оскільки вертикальні кути рівні: $\angle AKD = \angle CKB$, $\angle AKC = \angle BKD$, то в задачі йдеться про суміжні кути. Наприклад $\angle AKD$ і $\angle AKC$. За умовою $\angle AKD : \angle AKC = 4 : 5$, тому можемо ввести позначення: $\angle AKD = 4x$, $\angle AKC = 5x$. Оскільки $\angle AKD + \angle AKC = 180^\circ$, маємо рівняння: $4x + 5x = 180^\circ$, звідки $x = 20^\circ$. Тоді $\angle AKD = 4 \cdot 20^\circ = 80^\circ$, $\angle AKC = 5 \cdot 20^\circ = 100^\circ$. Далі: $\angle CKB = \angle AKD = 80^\circ$, $\angle BKD = \angle AKC = 100^\circ$.

В і д п о в і д ь. $80^\circ, 100^\circ, 80^\circ, 100^\circ$.



Кутом між прямими, що перетинаються, називають менший з кутів, що утворилися при перетині цих прямих.

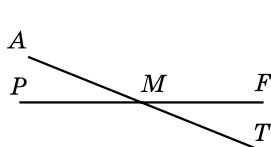
Наприклад, кут між прямими AB і DC з попередньої задачі дорівнює 80° . Кут між прямими не може перевищувати 90° .



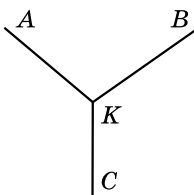
Які кути називають вертикальними? Яку властивість мають вертикальні кути? Який кут називають кутом між двома прямими?

105. (Усно) Назвіть пари вертикальних кутів на малюнку 63.

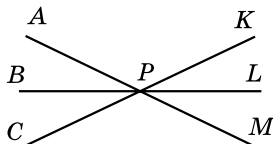
106. (Усно) Чи є на малюнку 64 вертикальні кути?



Мал. 63



Мал. 64



Мал. 65

107. Один з вертикальних кутів дорівнює: 1) 15° ; 2) 129° . Знайдіть другий кут.

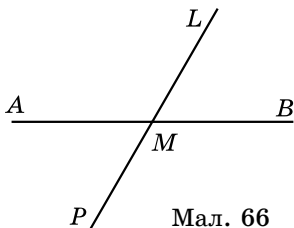
108. Один з вертикальних кутів дорівнює: 1) 42° ; 2) 139° . Знайдіть другий кут.

109. На малюнку 65 прямі AM , BL і CK перетинаються в точці P . Знайдіть усі пари вертикальних кутів.

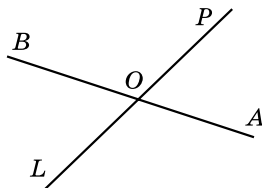
110. Один з кутів, що утворилися при перетині двох прямих, дорівнює 40° . Знайдіть інші кути.

111. На малюнку 66 $\angle AML = 120^\circ$. Знайдіть $\angle AMP$, $\angle PMB$ і $\angle BML$.

112. (Усно) Учень накреслив дві прямі, що перетинаються, та вимірявши транспортиром один з кутів, які при цьому утворилися, отримав 130° . Чи може він стверджувати, що кут між прямими дорівнює 130° ? Відповідь поясніть.



Мал. 66



Мал. 67

113. Прямі AB і PL перетинаються в точці O (мал. 67). $\angle POB = 118^\circ$. Знайдіть кут між прямими AB і PL .

114. Накресліть дві прямі, що перетинаються, та знайдіть за допомогою транспортира кут між ними.

115. Накресліть кут MON , що дорівнює 110° . Побудуйте доповняльні промені OL і OK до його сторін OM і ON відповідно.

Обчисліть градусні міри трьох нерозгорнутих кутів, що утворилися, і порівняйте з результатами вимірювання.

116. Накресліть кут AOB , що дорівнює 30° . Побудуйте доповняльні промені OP і OD до його сторін OA і OB відповідно. Обчисліть градусні міри трьох нерозгорнутих кутів, що утворилися, і порівняйте з результатами вимірювання.

117. Знайдіть градусну міру кожного з кутів, які утворилися при перетині двох прямих, якщо:

- 1) усі кути рівні між собою;
- 2) сума двох з них дорівнює 178° .

118. Знайдіть градусну міру кожного з кутів, які утворилися при перетині двох прямих, якщо:

- 1) сума двох з них дорівнює 16° ;
- 2) три із чотирьох кутів рівні між собою.

119. Знайдіть кут між прямими, що перетинаються, якщо:

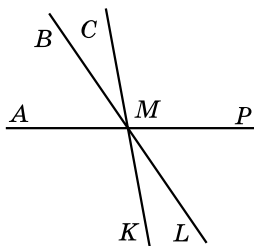
- 1) різниця двох з утворених кутів дорівнює 18° ;
- 2) сума трьох з утворених кутів дорівнює 293° .

120. Знайдіть кут між прямими, що перетинаються, якщо один з кутів, що утворилися, удвічі менший від іншого.

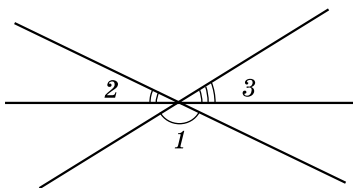
121. На мал. 68 прямі AP , BL і CK перетинаються в точці M , $\angle BMC = 20^\circ$, $\angle LMP = 60^\circ$. Знайдіть $\angle AMK$.

122. На мал. 68 прямі AP , BL і CK перетинаються в точці M , $\angle CMP = 105^\circ$, $\angle KML = 25^\circ$. Знайдіть $\angle AMB$.

123. На малюнку 69 зображено три прямі, що перетинаються в одній точці. Знайдіть суму кутів 1, 2 і 3.



Мал. 68



Мал. 69

124. Доведіть, що бісектриси вертикальних кутів є доповняльними променями.



125. На прямій послідовно позначено 10 точок так, що відстань між будь-якими двома сусідніми точками дорівнює 2 см. Знайдіть відстань між двома крайніми точками.

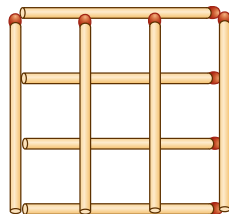
126. Відомо, що $\angle ABC = 70^\circ$, а $\angle CBD = 20^\circ$. Чи може градусна міра кута ABD дорівнювати:

- 1) 40° ; 2) 50° ; 3) 60° ;
4) 80° ; 5) 90° ; 6) 100° ?



127. На малюнку 70 фігуру складено з восьми сірників.

- 1) Скільки квадратів при цьому утворилося?
2) Як прибрати два сірники так, щоб залишилося лише три квадрати?



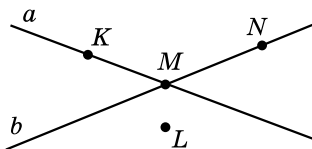
Мал. 70

Домашня самостійна робота № 1 (§ 1—§ 6)

Кожне завдання має чотири варіанти відповіді (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1. Яка з точок на малюнку 71 належить як прямій a , так і прямій b ?

- А) K ; Б) L ; В) M ; Г) N .



Мал. 71

2. Який із запропонованих кутів є тупим?

- А) $\angle M = 129^\circ$; Б) $\angle T = 90^\circ$; В) $\angle N = 180^\circ$; Г) $\angle L = 78^\circ$.

3. Пара суміжних кутів може дорівнювати...

- А) 18° і 172° ; Б) 27° і 153° ; В) 25° і 145° ; Г) 47° і 134° .

4. Промінь OP проходить між сторонами кута AOB . Знайдіть градусну міру кута AOB , якщо $\angle AOP = 20^\circ$, $\angle POB = 50^\circ$.

- А) 30° ; Б) 70° ; В) 110° ; Г) неможливо визначити.

5. Точка L належить відрізку AB . Знайдіть AL , якщо $LB = 5$ см, $AB = 8$ см.

- А) 13 см; Б) 9 см; В) 4 см; Г) 3 см.

6. Один з кутів, що утворилися при перетині двох прямих, дорівнює 160° . Знайдіть кут між прямими.

- А) 160° ; Б) 100° ; В) 80° ; Г) 20° .

7. Відомо, що $AB = 4$ см, $BC = 7$ см, $AC = 3$ см. Укажіть взаємне розташування точок A , B і C .

- А) точка A лежить між точками B і C ;
 Б) точка B лежить між точками A і C ;
 В) точка C лежить між точками B і A ;
 Г) жодна з точок не лежить між двома іншими.

8. Промінь OK є бісектрисою кута COB , $\angle COB = 70^\circ$ (мал. 72). Знайдіть $\angle AOK$.

- А) 110° ; Б) 135° ; В) 145° ; Г) 155° .

9. Один із суміжних кутів удвічі менший за другий. Знайдіть більший із цих кутів.

- А) 60° ; Б) 80° ; В) 100° ; Г) 120° .

10. На площині позначено п'ять точок так, що жодні три з них не лежать на одній прямій. Скільки різних прямих, кожна з яких проходить через деякі дві з даних точок, можна провести?

- А) 5; Б) 8; В) 10; Г) 15.

11. Розгорнутий кут MON поділено променями OA і OB на три кути. $\angle MOA = 120^\circ$, $\angle NOB = 110^\circ$. Знайдіть градусну міру кута AOB .

- А) 50° ; Б) 60° ; В) 70° ; Г) 80° .

12. Дано два кути, градусні міри яких відносяться як $1 : 2$. Різниця кутів, суміжних з ними, дорівнює 70° . Знайдіть більший з даних кутів.

- А) 70° ; Б) 90° ; В) 110° ; Г) 140° .

Завдання для перевірки знань № 1 (§1—§6)

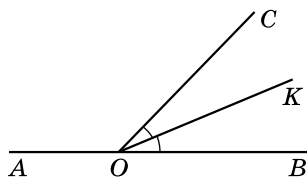
1. Назвіть точки, що належать прямій a , та точки, що їй не належать (мал. 73). Зробіть відповідні записи.

2. Який з даних кутів гострий, тупий, прямий, розгорнутий:

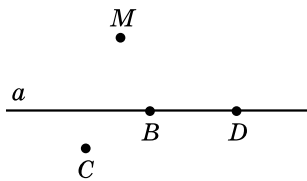
- 1) $\angle A = 92^\circ$; 2) $\angle B = 180^\circ$;
 3) $\angle C = 90^\circ$; 4) $\angle D = 31^\circ$

3. За малюнком 74 назвіть пари вертикальних кутів.

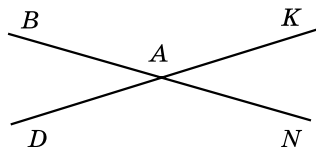
4. Точка C належить відрізку MN . Знайдіть довжину відрізка CM , якщо $MN = 7,2$ см, $CN = 3,4$ см.



Мал. 72



Мал. 73



Мал. 74

5. За допомогою транспортира накресліть кут, градусна міра якого дорівнює 70° , та проведіть його бісектрису.
6. Прямі AB і CD перетинаються в точці O , $\angle AOC = 132^\circ$. Знайдіть кут між прямими AB і CD .
7. Точки M і N належать відрізку AB , довжина якого дорівнює 30 см. Знайдіть довжину відрізка MN , якщо $AM = 20$ см, $BN = 16$ см.
8. Знайдіть суміжні кути, якщо один з них на 12° менший від другого.
9. Точки A , B і K лежать на одній прямій. Знайдіть довжину відрізка AB , якщо $AK = 9,3$ см, $KB = 3,7$ см. Скільки розв'язків має задача?

Додаткові вправи

10. Який кут утворює бісектриса кута 48° з променем, що є доповняльним до однієї з його сторін?
11. Два кути відносяться як $1 : 3$, а суміжні з ними — як $7 : 3$. Знайдіть дані кути.



7. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІ ПРЯМІ. ПЕРПЕНДИКУЛЯР. ВІДСТАНЬ ВІД ТОЧКИ ДО ПРЯМОЇ

Нехай при перетині двох прямих a і b один з кутів, що утворилися, є прямим, наприклад $\angle 1 = 90^\circ$ (мал. 75).

$\angle 1$ і $\angle 3$ — вертикальні, тому $\angle 3 = \angle 1 = 90^\circ$.

$\angle 1$ і $\angle 2$ — суміжні, тому $\angle 2 = 180^\circ - \angle 1 = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

$\angle 2$ і $\angle 4$ — вертикальні, тому $\angle 4 = \angle 2 = 90^\circ$.

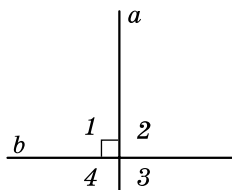
Отже, якщо один із чотирьох кутів, що утворилися при перетині двох прямих, дорівнює 90° , то решта кутів також прямі. У такому випадку кажуть, що прямі перетинаються під прямим кутом, або що вони перпендикулярні.



Дві прямі називають перпендикулярними, якщо вони перетинаються під прямим кутом.

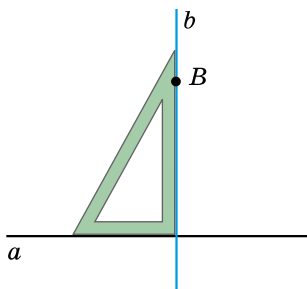
На малюнку 75 прямі a і b перпендикулярні. Перпендикулярність прямих можна записати за допомогою знака $\perp$. Запис $a \perp b$ читають так: «пряма a перпендикулярна до прямої b ».

Для побудови перпендикулярних прямих використовують креслярський

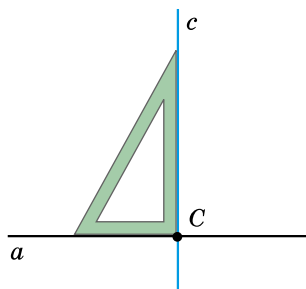


Мал. 75

косинець. На малюнку 76 через точку B , яка не належить прямій a , проведено пряму b , перпендикулярну до прямої a . На малюнку 77 точка C належить прямій a , і через неї перпендикулярно до прямої a проведено пряму c . В обох випадках побудовано єдину пряму, яка проходить через задану точку і є перпендикулярною до прямої a .



Мал. 76



Мал. 77

Отже,



через будь-яку точку площини можна провести лише одну пряму, перпендикулярну до даної прямої.

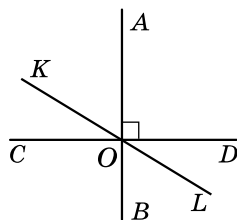
Задача. Прямі AB , CD і KL перетинаються в точці O , причому $AB \perp CD$ (мал. 78). Знайти $\angle AOK$, якщо $\angle COL = 160^\circ$.

Розв'язання. 1) Оскільки $AB \perp CD$, то $\angle COB = 90^\circ$.

2) $\angle BOL = \angle COL - \angle COB = 160^\circ - 90^\circ = 70^\circ$.

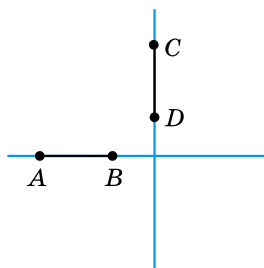
3) $\angle AOK = \angle BOL$ (як вертикальні), тому $\angle AOK = 70^\circ$.

Відповідь. 70° .

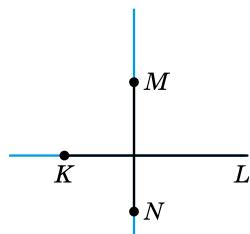


Мал. 78

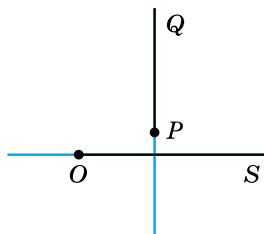
Відрізки або *промені* називають **перпендикулярними**, якщо вони лежать на перпендикулярних прямих. Наприклад, на малюнку 79 відрізок AB перпендикулярний до відрізка CD , на малюнку 80 промінь KL перпендикулярний до відрізка MN , а на малюнку 81 промінь PQ перпендикулярний до променя OS . Для запису перпендикулярності відрізків і променів також використовують знак $\perp$.



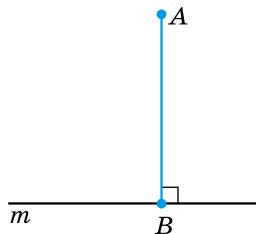
Мал. 79



Мал. 80



Мал. 81



Мал. 82



Перпендикуляром до прямої, проведеним з даної точки, називають відрізок прямої, перпендикулярної до даної, один з кінців якого — дана точка, а другий — точка перетину прямих. Довжину цього відрізка називають відстанню від точки до прямої.

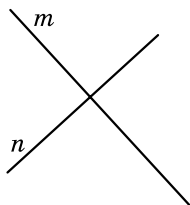
На малюнку 82 з точки A проведено перпендикуляр AB до прямої m . Точка B — **основа перпендикуляра**, а довжина відрізка AB — відстань від точки A до прямої m .



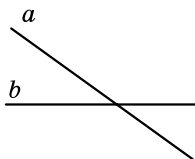
Які прямі називають перпендикулярними? ● Як побудувати пряму, перпендикулярну до даної прямої? ● Що називають перпендикуляром до прямої, проведеним з даної точки? ● Що називають відстанню від точки до прямої?

128. На яких з малюнків 83–86 зображено перпендикулярні прямі? У разі потреби використайте косинець. Виконайте відповідні записи.

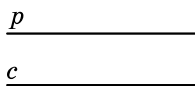
129. Накресліть пряму c та позначте точку A , що їй належить, і точку B , що їй не належить. Проведіть за допомогою косинця прямі через точки A і B так, щоб вони були перпендикулярними до прямої c .



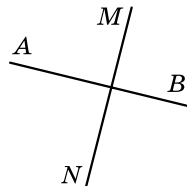
Мал. 83



Мал. 84

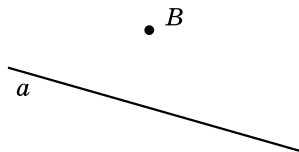


Мал. 85

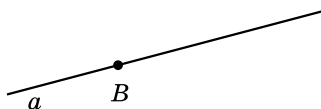


Мал. 86

130. Перенесіть малюнки 87 і 88 у зошит та для кожного випадку за допомогою косинця проведіть пряму b , що проходить через точку B перпендикулярно до прямої a .



Мал. 87



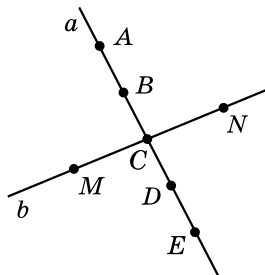
Мал. 88

131. На малюнку 89 прямі a і b перпендикулярні. Чи перпендикулярні:

- 1) відрізки AB і MN ;
- 2) промінь EA і відрізок CM ;
- 3) відрізки AB і DE ;
- 4) промені CN і CE ?

132. На малюнку 89 прямі a і b перпендикулярні. Чи перпендикулярні:

- 1) відрізки DE і CN ;
- 2) промені CM і CA ;
- 3) промінь CE і відрізок CA ;
- 4) відрізки BD і MN ?



Мал. 89

133. Накресліть пряму a , позначте точку A , що знаходиться на відстані 2,5 см від прямої a , та точку B , що знаходиться на відстані 4 см від прямої a .

134. Проведіть пряму m , позначте точку P , що знаходиться на відстані 3 см від прямої m , та точку K , що знаходиться на відстані 1,5 см від прямої m .

135. Накресліть відрізки AB і CD так, щоб вони були перпендикулярними та не перетиналися.

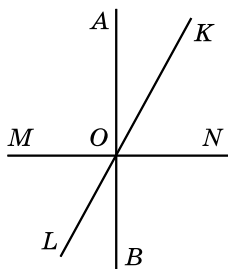
136. Накресліть промені MN і KL так, щоб вони були перпендикулярними та перетиналися.

137. Прямі AB , KL і MN перетинаються в точці O (мал. 90). Чи є перпендикулярними прямі AB і MN , якщо

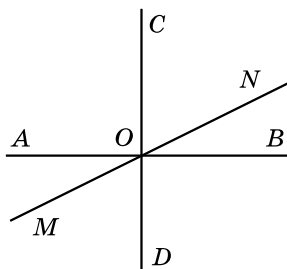
- 1) $\angle AOK = 25^\circ$, $\angle KON = 66^\circ$;
- 2) $\angle LON = 118^\circ$, $\angle LOB = 28^\circ$?

138. Прямі AB , KL і MN перетинаються в точці O (мал. 90). Чи є перпендикулярними прямі AB і MN , якщо

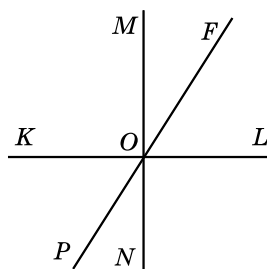
- 1) $\angle MOK = 122^\circ$, $\angle AOK = 31^\circ$;
- 2) $\angle MOL = 59^\circ$, $\angle LOB = 31^\circ$?



Мал. 90



Мал. 91



Мал. 92

139. (Усно) Чи є правильним означення: «Перпендикуляр до прямої — це будь-який відрізок, перпендикулярний до даної прямої»? Чому?

140. Прямі AB , CD і MN перетинаються в точці O , причому $AB \perp CD$ (мал. 91). Знайдіть:

- 1) $\angle MOD$, якщо $\angle NOB = 25^\circ$;
- 2) $\angle CON$, якщо $\angle MOB = 150^\circ$.

141. Прямі KL , MN і PF перетинаються в точці O , причому $KL \perp MN$ (мал. 92). Знайдіть:

- 1) $\angle KOP$, якщо $\angle NOF = 140^\circ$;
- 2) $\angle KOF$, якщо $\angle PON = 37^\circ$.

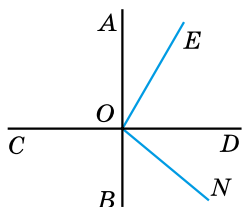
142. Куты ABC і CBM прямі. Доведіть, що точки A , B і M лежать на одній прямій.

143. Два суміжних кути, що утворилися в результаті перетину двох прямих, рівні між собою. Доведіть, що це перпендикулярні прямі.

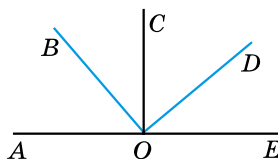
144. $AB \perp CD$ (мал. 93), $\angle EON = 110^\circ$. Знайдіть $\angle CON$, якщо $\angle AOE = 20^\circ$.

145. $AB \perp CD$ (мал. 93), $\angle CON = 135^\circ$, $\angle AOE = 25^\circ$. Знайдіть $\angle EOD$.

146. На малюнку 94 $\angle AOB = \angle COD$, $\angle BOC = \angle DOE$. Доведіть, що $OC \perp AE$ і $BO \perp OD$.



Мал. 93



Мал. 94

147. Доведіть, що промінь, проведений через вершину кута перпендикулярно до його бісектриси, є бісектрисою кута, суміжного з даним.

148. Промені OK і OL є бісектрисами кутів AOB і BOC відповідно, причому $OK \perp OL$. Доведіть, що кути AOB і BOC — суміжні.



149. На прямій послідовно позначено точки M , N і K . Знайдіть:

- 1) MK , якщо $MN = 3$ см 2 мм, $NK = 4,1$ см;
- 2) MN , якщо $MK = 7,8$ см, $NK = 2$ см 5 мм.



150. Знайдіть суміжні кути, різниця яких дорівнює 36° .

151. Периметр прямокутника дорівнює 32 см, а довжина кожної з його сторін є цілим числом сантиметрів. Чи може площа прямокутника дорівнювати:

- 1) 256 см^2 ; 2) 220 см^2 ; 3) 64 см^2 ;
- 4) 60 см^2 ; 5) 55 см^2 ; 6) 54 см^2 ?



8. ПАРАЛЕЛЬНІ ПРЯМІ

Дві прямі на площині можуть мати спільну точку (перетинатися) або не мати спільних точок (не перетинатися).

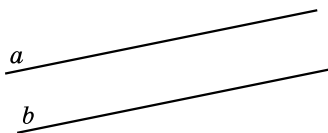


Дві прямі на площині називають паралельними, якщо вони не перетинаються.

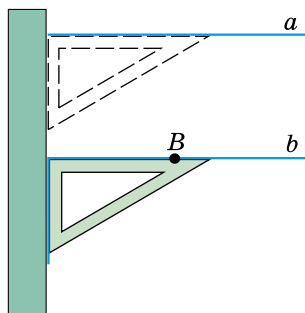
На малюнку 95 прямі a і b паралельні. Паралельність прямих записують за допомогою знака $\parallel$. Запис $a \parallel b$ читають так: «пряма a паралельна прямій b ».

Навколо нас є багато прикладів паралельних прямих: прямолінійні ділянки шляху залізниці, горизонтальні чи вертикальні прямі зошита в клітинку, протилежні сторони рами тощо.

Для побудови паралельних прямих використовують креслярський косинець і лінійку. На мал. 96 показано, як через точку B , яка не належить прямій a , проведено пряму b , паралельну прямій a .



Мал. 95



Мал. 96

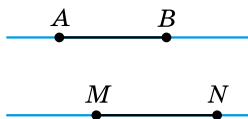
Здавна істинною вважають таку аксіому, що виражає основну властивість паралельних прямих.



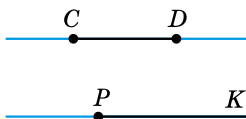
VIII. Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, паралельну даній.

Цю аксіому називають *аксіомою паралельності прямих*, або *аксіомою Евкліда*. Саме він перший її запропонував як п'ятий постулат. (*Постулат* — припущення, вихідне положення, яке приймають без доведення; аксіома.)

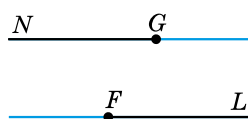
Відрізки або *промені* називають *паралельними*, якщо вони лежать на паралельних прямих. На малюнку 97 відрізок AB паралельний відрізку MN , на малюнку 98 відрізок CD паралельний променю PK , а на малюнку 99 промінь GN паралельний променю FL . Для запису паралельності відрізків і променів також використовують знак $\parallel$.



Мал. 97



Мал. 98

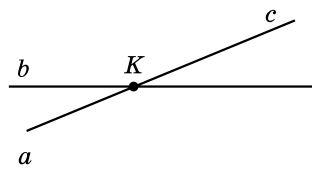


Мал. 99

Задача. Доведіть, що коли пряма перетинає одну з двох паралельних прямих, то вона перетинає і другу пряму.

Д о в е д е н н я. Нехай a і b — паралельні прямі і пряма c перетинає пряму b в точці K (мал. 100).

Припустимо, що пряма c не перетинає пряму a , тобто $c \parallel a$. Отже, через точку K проходять дві прямі c



Мал. 100

і b , і обидві паралельні прямій a . Це суперечить аксіомі паралельності прямих.

Отже, наше припущення є хибним, значить правильним є те, що пряма c перетинає пряму a . Твердження доведено. ▲

Зауважимо, що спосіб міркування, яким ми довели твердження попередньої задачі, називають *доведенням від супротивного*. Щоб довести, що прямі a і c перетинаються, ми припустили протилежне, тобто що a і c не перетинаються. У процесі міркувань, виходячи із цього припущення, ми прийшли до протиріччя з аксіомою паралельності прямих. Це означає, що наше припущення було хибним, отже, правильним є протилежне до нього припущення, тобто що пряма c перетинає пряму a .

Суть доведення від супротивного полягає в тому, що на початку доведення припускається істинність твердження, протилежного тому, що треба довести. Доведення (міркування) на основі цього припущення призводить до висновку, який суперечить або умові теореми (задачі) або деякому з істинних тверджень (аксіомі, теоремі тощо), що означатиме, що припущення, протилежне тому, що треба було довести, є хибним. Отже, істинним є те, що й треба було довести.



Протягом понад двох тисячоліть вчені намагалися довести п'ятий постулат Евкліда, що, по суті, є аксіомою паралельності прямих. На початку XIX ст. три видатних учених: росіянин М.І. Лобачевський, німець К.Ф. Гаусс (1777–1855) та угорець Я. Больяй (1802–1860), незалежно один від одного, прийшли до висновку, що довести п'ятий постулат Евкліда неможливо, оскільки він є очевидним, тобто є аксіомою.

Микола Іванович Лобачевський пішов далі, і, замінивши аксіому паралельності на таку: «через точку поза даною прямою можна провести щонайменше дві прямі, паралельні даній», побудував нову геометрію — неевклідову. Її стали називати «геометрією Лобачевського».



М.І. Лобачевський
(1792–1856)

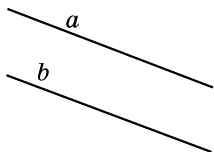


Які прямі називають паралельними? ● Які інструменти використовують для побудови паралельних прямих? ● Сформулюйте аксіому паралельності прямих. ● Поясніть, у чому полягає спосіб доведення від супротивного.

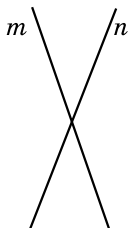
152. Запишіть з використанням символів:

- 1) пряма a паралельна прямій m ;
- 2) пряма CD паралельна прямій PK .

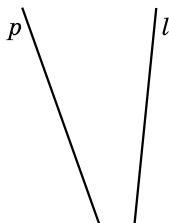
153. На яких з малюнків 101–104 зображено паралельні прямі?



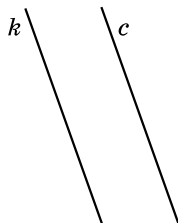
Мал. 101



Мал. 102



Мал. 103

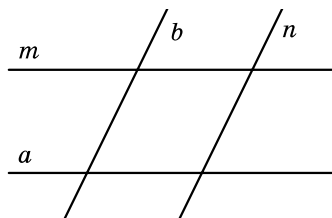


Мал. 104

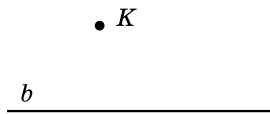
154. Укажіть пари паралельних прямих на малюнку 105.

155. 1) Дано пряму b і точку K , що їй не належить (мал. 106). Скільки можна провести через точку K прямих, паралельних прямій b ?

2) Скільки взагалі можна провести прямих, паралельних прямій b ?



Мал. 105



Мал. 106

156. Проведіть пряму l і позначте точку A , що їй не належить. За допомогою косинця і лінійки через точку A проведіть пряму, паралельну прямій l .

157. Позначте точку P і проведіть пряму a , що не проходить через цю точку. За допомогою косинця і лінійки через точку P проведіть пряму, паралельну прямій a .

158. Накресліть відрізки AB і CD та промінь KL так, щоб відрізок AB був паралельний променю KL і перпендикулярний до відрізка CD .

159. Накресліть промені MN і KL та відрізок AB так, щоб промінь MN був паралельний променю KL і перпендикулярний до відрізка AB .

160. 1) Накресліть кут ABC , який дорівнює 120° , та позначте точку K , що лежить у внутрішній області цього кута.

2) Через точку K за допомогою косинця і лінійки проведіть пряму m , паралельну променю BA , та пряму n , паралельну променю BC .

3) Використовуючи транспортир, знайдіть кут між прямими m і n .

4) Зробіть висновки.

161. 1) Накресліть кут MNL , який дорівнює 50° , та позначте точку C , що належить внутрішній області цього кута.

2) Через точку C за допомогою косинця і лінійки проведіть пряму a , паралельну променю NM , та пряму b , паралельну променю NL .

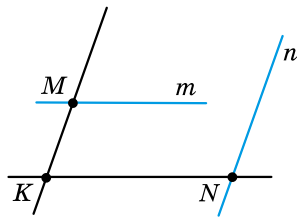
3) Використовуючи транспортир, знайдіть кут між прямими a і b .

4) Зробіть висновки.

162. Прямі a і b перетинаються. Пряма m паралельна прямій a . Доведіть, що прямі m і b перетинаються.

163. Прямі a і b паралельні. Пряма l не перетинає пряму a . Доведіть, що пряма l не перетинає пряму b .

164. Прямі KM і KN (мал. 107) перетинаються. Через точку M проведено пряму m , паралельну прямій KN , а через точку N проведено пряму n , паралельну прямій KM . Доведіть, що прямі m і n перетинаються.



Мал. 107

165. Прямі a і b — паралельні, прямі b і c також паралельні. Пряма l перетинає пряму a . Доведіть, що пряма l перетинає прямі b і c .



166. 1) Позначте на прямій m точки A і B та точку C , яка не належить прямій m .

2) Виміряйте відстані AB , AC і BC та порівняйте AB з $AC + BC$.

3) Зробіть висновки.

167. Один з кутів, що утворилися при перетині двох прямих, складає 25 % від іншого. Знайдіть кут між прямими.



168. Чи можна квадрат, довжина сторони якого дорівнює 2017 клітинок, розрізати на дві рівні фігури так, щоб лінії розрізів проходили по сторонах клітинок?



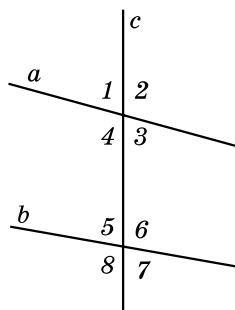
9. КУТИ, УТВОРЕНІ ПРИ ПЕРЕТИНІ ДВОХ ПРЯМИХ СІЧНОЮ. ОЗНАКИ ПАРАЛЕЛЬНОСТІ ПРЯМИХ

Пряма c називається **січною** для прямих a і b , якщо вона перетинає їх у двох точках (мал. 108).

При перетині прямих a і b січною c утворилося вісім кутів, позначених на малюнку 108. Деякі пари цих кутів мають спеціальні назви:



внутрішні односторонні кути: 4 і 5 ; 3 і 6 ;
внутрішні різносторонні кути: 4 і 6 ; 3 і 5 ;
відповідні кути: 1 і 5 ; 2 і 6 ; 3 і 7 ; 4 і 8 .



Мал. 108

Припустимо, що в задачі необхідно встановити паралельність прямих. Виходячи з означення, це зробити неможливо, оскільки для цього прямі потрібно продовжити до нескінченності. Проте встановити, паралельні прямі чи ні, можна, використавши спеціальні теореми, які називають ознаками.

Ознака (у геометрії) — це теорема, що вказує умови, при виконанні яких можна стверджувати про певні властивості фігур, належність їх до певного класу тощо.

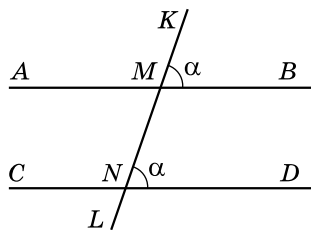
Розглянемо **ознаки** паралельності прямих.

Т е о р е м а (ознака паралельності прямих). **Якщо при перетині двох прямих січною відповідні кути рівні, то прямі паралельні.**

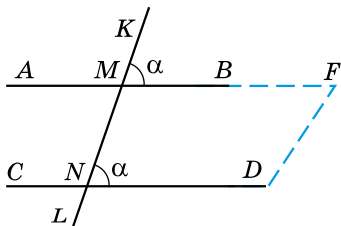
Д о в е д е н н я. Нехай при перетині прямих AB і CD січною KL утворилися рівні відповідні кути $\angle KMB = \angle MND = \alpha$ (мал. 109).

Доведемо теорему методом від супротивного.

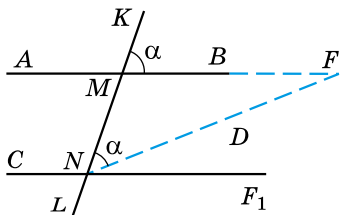
Припустимо, що дані прямі AB і CD не паралельні, а перетинаються в деякій точці F (мал. 110). Не змінюючи міри кута KMB , перенесемо його так, щоб вершина кута — точка M — збіглася з точкою N , промінь MK збігся з променем NM , а промінь MB зайняв положення променя NF_1 (мал. 111). Тоді $\angle MNF_1 = \angle KMF = \alpha$. Оскільки промінь NF_1 не збігається з променем NF , бо $F \neq NF_1$, то $\angle MNF_1 \neq \angle MNF$. Але ж було встановлено, що $\angle MNF = \alpha$ і $\angle MNF_1 = \alpha$.



Мал. 109



Мал. 110



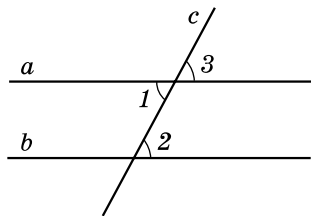
Мал. 111

Прийшли до протиріччя, бо наше припущення про те, що прямі AB і CD не паралельні, було хибним. А значить, прямі AB і CD паралельні, що й треба було довести. ▲

Н а с л і д о к 1. Якщо при перетині двох прямих січною внутрішні різносторонні кути рівні, то прямі паралельні.

Д о в е д е н н я. Нехай при перетині прямих a і b січною c внутрішні різносторонні кути виявилися рівними, наприклад $\angle 1 = \angle 2$ (мал. 112).

Але кути 1 і 3 — вертикальні, тому $\angle 1 = \angle 3$. Отже, $\angle 2 = \angle 3$. Кути 2 і 3 — відповідні, тому за ознакою паралельності прямих маємо $a \parallel b$. ▲

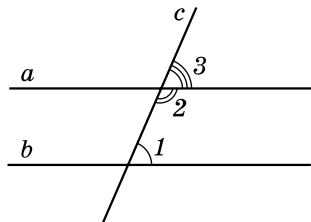


Мал. 112

Н а с л і д о к 2. Якщо при перетині двох прямих січною сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180° , то прямі паралельні.

Д о в е д е н н я. Нехай при перетині прямих a і b січною c сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180° , наприклад $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ (мал. 113). Кути 2 і 3 — суміжні, тому $\angle 3 + \angle 2 = 180^\circ$.

Із цих двох рівностей випливає, що $\angle 1 = \angle 3$. Ці кути є відповідними, а тому прямі a і b — паралельні за ознакою паралельності прямих. ▲

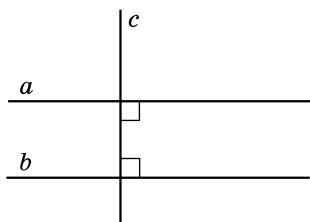


Мал. 113

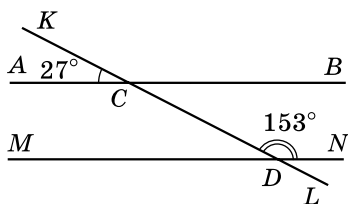
Н а с л і д о к 3. Дві прямі, перпендикулярні до третьої прямої, паралельні.

На малюнку 114: $a \perp c$ і $b \perp c$. Враховуючи наслідок 2, маємо $a \parallel b$. $\blacktriangle$

Зауважимо, що наслідки 1–3 можна також розглядати як ознаки паралельності прямих.



Мал. 114



Мал. 115

Задача. Чи паралельні прямі AB і MN на малюнку 115?

Розв'язання. $\angle BCD = \angle ACK$ (як вертикальні). $\angle BCD = 27^\circ$. Оскільки $27^\circ + 153^\circ = 180^\circ$, то сума внутрішніх односторонніх кутів BCD і CDN дорівнює 180° . Тому, за наслідком 2, $AB \parallel MN$.

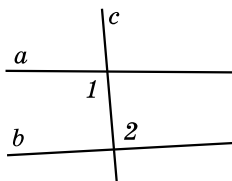
Відповідь. Так.



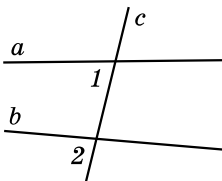
Що таке січна? $\bullet$ За малюнком 108 назвіть пари внутрішніх односторонніх кутів; внутрішніх різносторонніх кутів; відповідних кутів. $\bullet$ Сформулюйте і доведіть ознаку паралельності прямих та наслідки з неї.

169. (Усно) Як називаються кути 1 і 2 на малюнках 116–118?

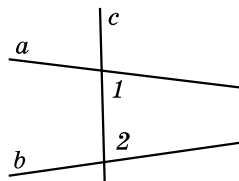
170. Запишіть, як називаються кути 1 і 2 на малюнках 119–121.



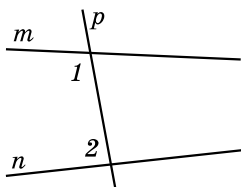
Мал. 116



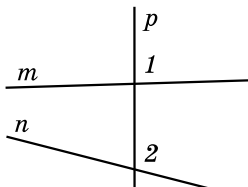
Мал. 117



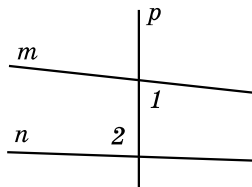
Мал. 118



Мал. 119

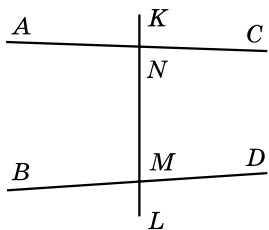


Мал. 120

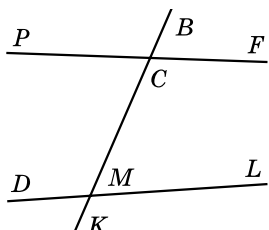


Мал. 121

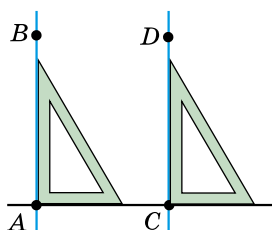
171. Запишіть усі пари внутрішніх односторонніх кутів; внутрішніх різносторонніх кутів; відповідних кутів (мал. 122).



Мал. 122



Мал. 123

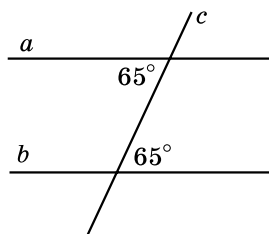


Мал. 124

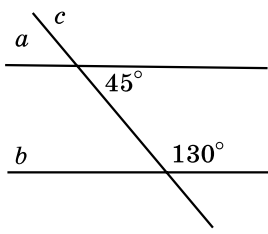
172. Запишіть усі пари внутрішніх односторонніх кутів; внутрішніх різносторонніх кутів; відповідних кутів (мал. 123).

173. (Усно) Чи паралельні прямі AB і CD на малюнку 124? Чому?

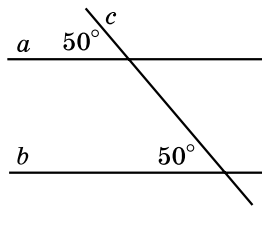
174. Якими є прямі a і b (паралельними чи такими, що перетинаються) на малюнках 125–130?



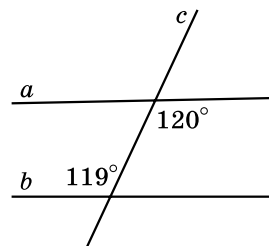
Мал. 125



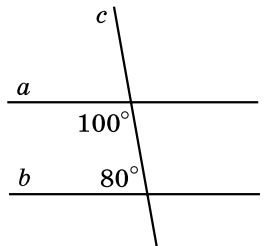
Мал. 126



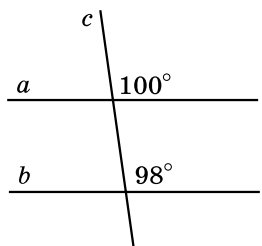
Мал. 127



Мал. 128



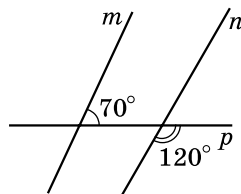
Мал. 129



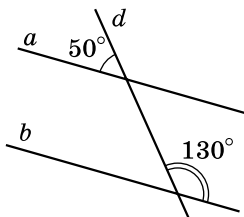
Мал. 130

175. На малюнку 131 позначено міри двох кутів, що утворилися при перетині прямих m і n січною p . Обчисліть міри всіх інших кутів, що утворилися. Чи паралельні прямі m і n ?

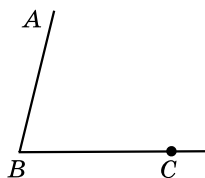
176. На малюнку 132 позначено міри двох кутів, що утворилися при перетині прямих a і b січною d . Обчисліть міри всіх інших кутів, що утворилися. Чи паралельні прямі a і b ?



Мал. 131



Мал. 132



Мал. 133

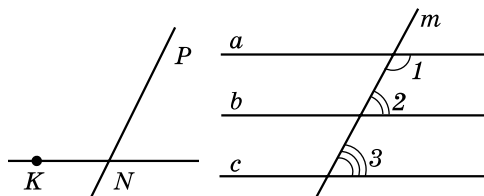
177. Доповніть малюнок 133: проведіть пряму CM так, щоб кути ABC і BCM були внутрішніми різносторонніми кутами для прямих AB і CM та січної BC . Як розмістяться точки A і M відносно прямої BC ?

178. Доповніть малюнок 134: проведіть пряму KA так, щоб кути AKN і KNP були внутрішніми односторонніми кутами для прямих AK і PN та січної KN . Як розмістяться точки A і P відносно прямої KN ?

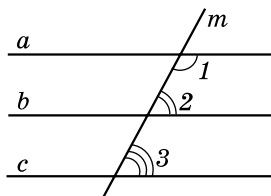
179. На малюнку 135 укажіть паралельні прямі, якщо $\angle 1 = 118^\circ$, $\angle 2 = 62^\circ$, $\angle 3 = 63^\circ$.

180. На малюнку 135 укажіть паралельні прямі, якщо $\angle 1 = 121^\circ$, $\angle 2 = 60^\circ$, $\angle 3 = 60^\circ$.

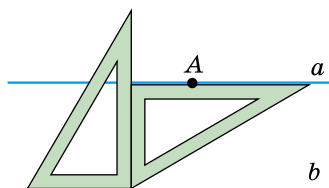
181. Через точку A за допомогою двох креслярських косинців провели пряму a (мал. 136). Чи паралельні прямі a і b ? Відповідь обґрунтуйте.



Мал. 134



Мал. 135

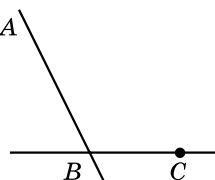


Мал. 136

182. 1) Виміряйте $\angle ABC$ (мал. 137) і накресліть його в зошиті.

2) Побудуйте кут PCK , що дорівнює куту ABC і є йому відповідним.

3) Назвіть паралельні прямі, які утворилися. Обґрунтуйте їх паралельність.

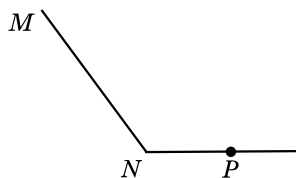


Мал. 137

183. 1) Виміряйте $\angle MNP$ (мал. 138) і накресліть його в зошиті.

2) Побудуйте $\angle APB$, що дорівнює куту MNP і є йому відповідним.

3) Назвіть паралельні прямі, які утворилися. Обґрунтуйте їх паралельність.



Мал. 138

184. Прямі AB перетинає пряму CD у точці A , а пряму MN — у точці B . $\angle CAB = 90^\circ$, $\angle ABN = 90^\circ$. Чи паралельні прямі CD і MN ?

185. На малюнку 139 $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$. Доведіть, що $a \parallel b$.

186. На малюнку 140 $\angle 1 = \angle 2$. Доведіть, що прямі $m \parallel n$.

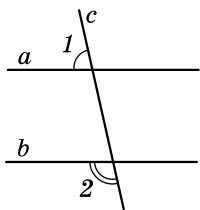
187. На малюнку 141 $\angle 4 + \angle 5 = 190^\circ$. Знайдіть:

1) $\angle 2 + \angle 7$; 2) $\angle 1 + \angle 8$; 3) $\angle 3 + \angle 6$.

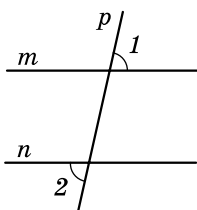
188. На малюнку 141 $\angle 3 + \angle 6 = 160^\circ$. Знайдіть:

1) $\angle 2 + \angle 7$; 2) $\angle 1 + \angle 8$; 3) $\angle 4 + \angle 5$.

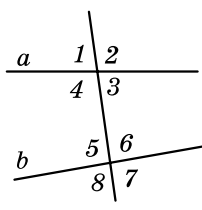
189. $\angle ABC = 70^\circ$, $\angle BCD = 100^\circ$. Чи можуть прямі AB і CD бути паралельними? Відповідь обґрунтуйте.



Мал. 139



Мал. 140



Мал. 141

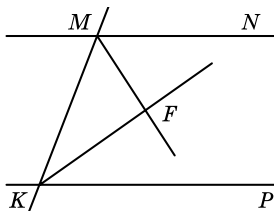
190. $\angle MNP = 60^\circ$, $\angle NPK = 120^\circ$. Чи можуть прямі MN і KP бути паралельними? Відповідь обґрунтуйте.

191. Кут між прямими a і b дорівнює куту між прямими b і c . Чи можна стверджувати, що прямі a і c паралельні?

192. Прямі a і b перетинає пряма c . Чотири з восьми кутів, що утворилися, дорівнюють по 30° , а решта чотири — по 150° . Чи можна стверджувати, що прямі a і b паралельні?

193. MF — бісектриса кута KMN , KF — бісектриса кута MKP (мал. 142). $\angle MKF + \angle FMK = 90^\circ$. Доведіть, що $MN \parallel KP$.

194. Прямі a і b перпендикулярні до прямої m . Прямі a і b перетинає пряма c . Чи перетинаються прямі b і c ? Відповідь обґрунтуйте.



Мал. 142



195. 1) Накресліть кут ABC , який дорівнює 70° , та позначте точку K , що належить променю BA .

2) Через точку K за допомогою косинця проведіть пряму m , перпендикулярну до променя BA , та пряму n , перпендикулярну до променя BC .

3) Користуючись транспортиром, знайдіть кут між прямими m і n .

196. Відомо, що $\angle AOB = \angle BOC = 130^\circ$. Знайдіть $\angle AOC$.



197. Чи можна трикутник розрізати на частини так, щоб утворилося три чотирикутники? Якщо так, то виконайте це.



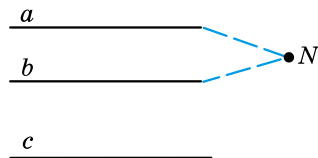
10. ВЛАСТИВІСТЬ ПАРАЛЕЛЬНИХ ПРЯМИХ. ВЛАСТИВОСТІ КУТІВ, УТВОРЕНИХ ПРИ ПЕРЕТИНІ ПАРАЛЕЛЬНИХ ПРЯМИХ СІЧНОЮ

Розглянемо властивість паралельних прямих.

Т е о р е м а 1 (властивість паралельних прямих). Дві прямі, паралельні третій прямій, паралельні одна одній.

Д о в е д е н н я. Нехай прямі a і b паралельні прямій c . Доведемо, що $a \parallel b$.

Застосуємо доведення від супротивного. Припустимо, що прямі a і b не паралельні, а перетинаються в деякій точці N (мал. 143). Отже, через точку N проходять дві прямі a і b , що паралельні прямій c . Це суперечить аксіомі паралельності прямих. Отже, наше припущення є хибним. Тому $a \parallel b$. Теорему доведено. $\blacktriangle$



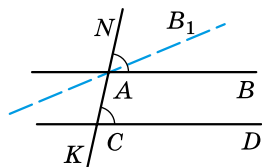
Мал. 143

Далі розглянемо властивості кутів, що утворилися при перетині паралельних прямих січною.

Т е о р е м а 2 (властивість відповідних кутів, що утворилися при перетині паралельних прямих січною). Відповідні кути, що утворилися при перетині паралельних прямих січною, рівні.

Д о в е д е н н я. Нехай паралельні прямі AB і CD перетинає січна NK (мал. 144). Доведемо, що $\angle NAB = \angle ACD$.

Припустимо, що $\angle NAB \neq \angle ACD$. Проведемо пряму AB_1 так, щоб виконувалася



Мал. 144

рівність $\angle NAB_1 = \angle ACD$. За ознакою паралельності прямих прямі AB_1 і CD паралельні. Але ж за умовою і $AB \parallel CD$. Прийшли до того, що через точку A проходять дві прямі AB і AB_1 , паралельні прямій CD , що суперечить аксіомі паралельності прямих. Отже, наше припущення є хибним і тому відповідні кути, утворені при перетині паралельних прямих січною, рівні: $\angle NAB = \angle ACD$. Теорему доведено. $\blacktriangle$

Теорема про властивість відповідних кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною, є *оберненою* до ознаки паралельності прямих.

Пояснимо, як це слід розуміти. Кожна теорема містить умову і висновок. Якщо поміняти місцями умову і висновок теореми, то одержимо нове твердження (правильне або неправильне), умовою якого буде висновок даної теореми, а висновком — її умова. Якщо одержане при цьому твердження є істинним, його називають теоремою, оберненою до даної, а дану теорему — прямою.

У теоремі, яка виражає ознаку паралельності прямих, умовою є перша частина твердження: «при перетині двох прямих січною відповідні кути рівні» (це дано), а висновком — друга частина: «прямі паралельні» (це треба довести). Бачимо, що остання розглянута нами теорема і є оберненою до ознаки паралельності прямих. Умова цієї теореми: «прямі паралельні» (це дано), а висновок — «відповідні кути, утворені при перетині прямих січною, рівні» (це треба довести).

Не для кожної теореми буде справедливою і обернена теорема. Наприклад, для теореми про властивість вертикальних кутів не існує оберненої, оскільки твердження: «якщо два кути рівні, то вони вертикальні» — неправильне.

Систематизуємо викладене вище у таблиці.

Частина твердження (теореми)	Ознака паралельності прямих (<i>пряма теорема</i>)	Властивість відповідних кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною (<i>обернена теорема</i>)
Умова	Відповідні кути, утворені при перетині прямих січною, рівні	Прямі паралельні
Висновок	Прямі паралельні	Відповідні кути, утворені при перетині прямих січною, рівні

Розглянемо наслідки з теореми 2.

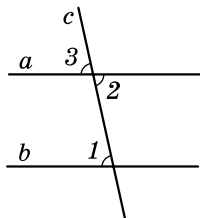
Н а с л і д о к 1 (властивість внутрішніх різносторонніх кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною).
Внутрішні різносторонні кути, утворені при перетині паралельних прямих січною, рівні.

Д о в е д е н н я. Нехай паралельні прямі a і b перетинає січна c (мал. 145). Доведемо, що внутрішні різносторонні кути, наприклад 1 і 2, рівні.

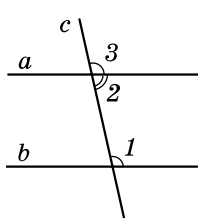
Оскільки $a \parallel b$, то відповідні кути 1 і 3 рівні. Кути 2 і 3 рівні, як вертикальні. З рівностей $\angle 1 = \angle 3$ і $\angle 2 = \angle 3$ випливає, що $\angle 1 = \angle 2$. ▲

Н а с л і д о к 2 (властивість внутрішніх односторонніх кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною).
Сума внутрішніх односторонніх кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною, дорівнює 180° .

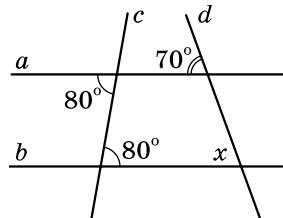
Д о в е д е н н я. Нехай паралельні прямі a і b перетинає січна c (мал. 146). Доведемо, що сума внутрішніх односторонніх кутів, наприклад 1 і 2, дорівнює 180° .



Мал. 145



Мал. 146



Мал. 147

Оскільки $a \parallel b$, то відповідні кути 1 і 3 рівні. Кути 2 і 3 — суміжні, тому $\angle 3 + \angle 2 = 180^\circ$, але ж $\angle 1 = \angle 3$. Тому $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$. ▲

Теорему 2 та наслідки з неї також можна розглядати як *властивості паралельних прямих*.

Задача. Знайдіть невідомий кут x за малюнком 147.

Р о з в ' я з а н н я. Оскільки внутрішні різносторонні кути, утворені при перетині січною c прямих a і b , рівні (обидва по 80°), то $a \parallel b$. Відповідні кути, утворені при перетині січною d паралельних прямих a і b , рівні. Тому $x = 70^\circ$.

В і д п о в і д ь. 70° .



Сформулюйте та доведіть властивість паралельних прямих. ● Сформулюйте та доведіть теорему про властивість відповідних кутів, що утворилися при перетині паралельних прямих січною, та наслідки з неї. ● Поясніть, що таке теорема, обернена до даної.

198. (Усно) На малюнку 148 $a \parallel b$, c — січна.

- 1) Чи рівні між собою кути 5 і 4; 2 і 7?
- 2) Чи рівні між собою кути 1 і 3?
- 3) Обчисліть суму кутів 1 і 4.

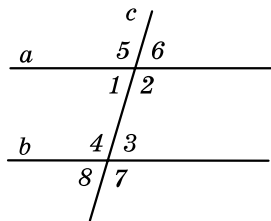
199. На малюнку 148 прямі a і b паралельні, c — січна.

- 1) Чи рівні між собою кути 1 і 8; 6 і 3?
- 2) Чи рівні між собою кути 2 і 4?
- 3) Обчисліть суму кутів 2 і 3.

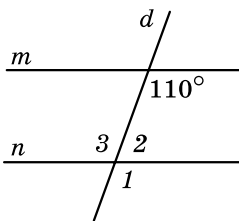
200. $m \parallel n$, d — січна (мал. 149). Знайдіть $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$.

201. $m \parallel n$, d — січна (мал. 150). Знайдіть $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$.

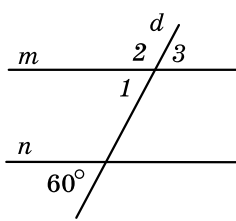
202. Градусна міра одного з кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 140° . Знайдіть градусні міри решти семи кутів.



Мал. 148



Мал. 149



Мал. 150

203. Один з кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 50° . Знайдіть інші сім кутів.

204. Один з кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 37° . Чи може один з решти семи кутів дорівнювати:

- 1) 133° ; 2) 143° ; 3) 153° ?

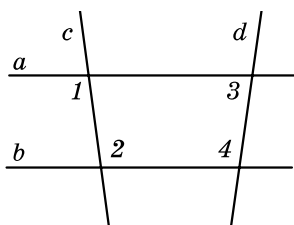
205. Дано паралельні прямі a і b та точку M , що не належить жодній з прямих. Через точку M паралельно до прямої a проведено пряму m . Чи паралельні прямі b і m ?

206. Знайдіть градусну міру кожного з двох внутрішніх різносторонніх кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, якщо їх сума дорівнює 240° .

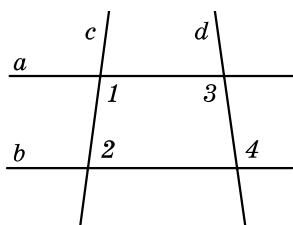
207. Сума двох відповідних кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 108° . Знайдіть ці кути.

208. На малюнку 151 $\angle 1 = \angle 2$. Доведіть, що $\angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$.

209. На малюнку 152 $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$. Доведіть, що $\angle 3 = \angle 4$.



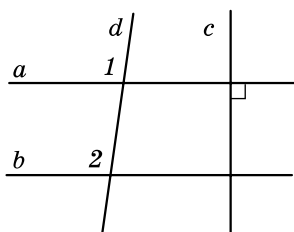
Мал. 151



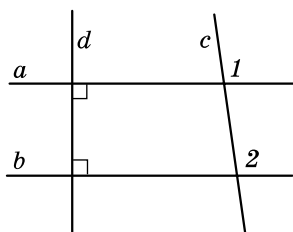
Мал. 152

210. На малюнку 153 $\angle 1 = \angle 2$, $c \perp a$. Доведіть, що $c \perp b$.

211. На малюнку 154 $a \perp d$, $b \perp d$. Доведіть, що $\angle 1 = \angle 2$.



Мал. 153



Мал. 154

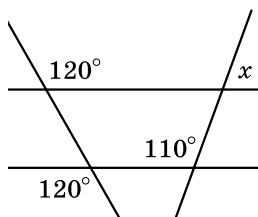
212. Знайдіть градусну міру кожного з двох внутрішніх односторонніх кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, якщо:

- 1) один з них на 16° більший за другий;
- 2) один з них утричі менший за другий;
- 3) їх градусні міри відносяться як 5 : 7.

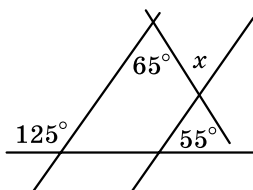
213. Знайдіть градусну міру кожного з двох внутрішніх односторонніх кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, якщо:

- 1) один з них у 4 рази більший за другий;
- 2) один з них на 8° менший за другий;
- 3) їх градусні міри відносяться як 5 : 4.

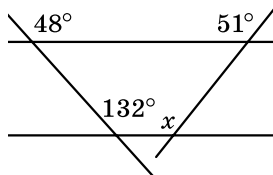
214. Знайдіть градусну міру кута x на кожному з малюнків 155–157.



Мал. 155

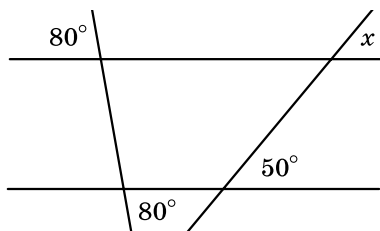


Мал. 156

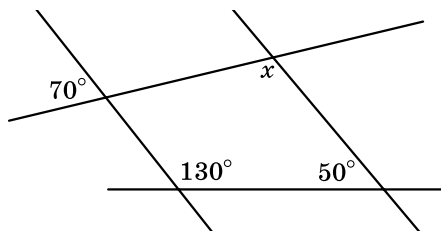


Мал. 157

215. Знайдіть градусну міру кута x на кожному з малюнків 158, 159.



Мал. 158



Мал. 159

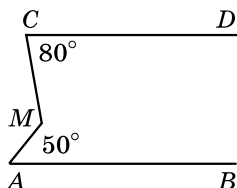
216. Прямі a і b не паралельні прямій m . Чи можна зробити висновок, що прямі a і b не паралельні між собою?

217. Сума градусних мір трьох з восьми кутів, що утворилися при перетині паралельних прямих січною, дорівнює 120° . Знайдіть градусні міри кожного з восьми кутів.

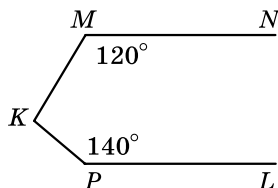
218. Сума градусних мір чотирьох з восьми кутів, що утворилися при перетині паралельних прямих січною, дорівнює 128° . Знайдіть градусні міри кожного з восьми кутів.

219. На малюнку 160 $AB \parallel CD$. Знайдіть $\angle CMA$.

220. На малюнку 161 $MN \parallel PL$. Знайдіть $\angle MKP$.



Мал. 160



Мал. 161

221. Доведіть, що бісектриси пари внутрішніх різносторонніх кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, паралельні.

222. Доведіть, що бісектриси пари відповідних кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, паралельні.



223. Накресліть відрізок AB , промінь CD та пряму a так, щоб відрізок AB був перпендикулярним до променя CD , але не перетинав його, а промінь CD був паралельним прямій a .

224. Розв'яжіть задачі, умови яких подано в таблиці, та знайдіть прізвище видатного українського письменника.

Точка C належить відрізку AB завдовжки 16 см. Знайдіть відрізки AC і BC , якщо:	AC	BC
AC більший за BC на 2 см	Н	А
AC більший за BC утричі	О	Ф
$AC : BC = 5 : 3$	К	Р

4 см	6 см	7 см	9 см	10 см	12 см

• • •

• • •

• • •

Мал. 162



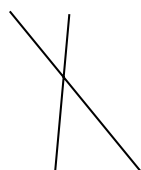
225. Не відриваючи олівця від паперу, проведіть через дев'ять точок (мал. 162) чотири відрізки.

Домашня самостійна робота № 2 (§7—§10)

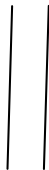
Кожне завдання має чотири варіанти відповіді (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1. На якому з малюнків 163–166 зображено перпендикулярні прямі?

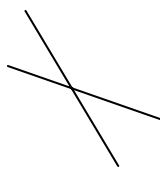
А) мал. 163; Б) мал. 164; В) мал. 165; Г) мал. 166.



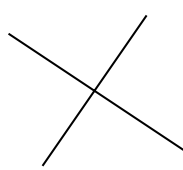
Мал. 163



Мал. 164



Мал. 165



Мал. 166

2. Укажіть, на якому з малюнків 163–166 зображено паралельні прямі:

А) мал. 163; Б) мал. 164; В) мал. 165; Г) мал. 166.

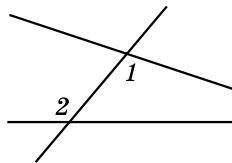
3. Як називають кути 1 і 2 на малюнку 167?

А) внутрішні односторонні;

Б) відповідні;

В) вертикальні;

Г) внутрішні різносторонні.



Мал. 167

4. Укажіть, яке з наведених тверджень є правильним:

А) перпендикулярні відрізки завжди мають спільну точку;

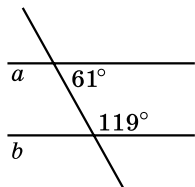
Б) перпендикулярні прямі завжди мають спільну точку;

В) перпендикулярні промені завжди мають спільну точку;

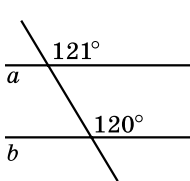
Г) перпендикулярні промінь і відрізок завжди мають спільну точку.

5. На якому з малюнків 168–171 прямі a і b паралельні?

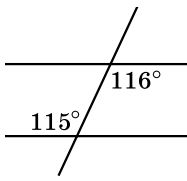
А) мал. 168; Б) мал. 169; В) мал. 170; Г) мал. 171.



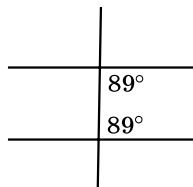
Мал. 168



Мал. 169



Мал. 170



Мал. 171

6. Один з кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 35° . Якою може бути градусна міра одного з інших семи кутів?

А) 50° ; Б) 105° ; В) 145° ; Г) 55° .

7. Прямі AB і CD перпендикулярні та перетинаються в точці O . У внутрішній області кута AOD взято точку M так, що $\angle MOD = 20^\circ$. Пряма MN проходить через точку O . Знайдіть градусну міру кута AON .

А) 20° ; Б) 70° ; В) 110° ; Г) 160° .

8. На малюнку 172 $\angle 2 + \angle 3 = 175^\circ$. Знайдіть $\angle 1 + \angle 4$.

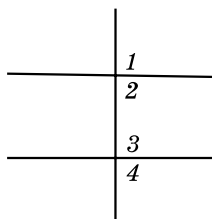
А) 195° ; Б) 185° ; В) 175° ; Г) 165° .

9. За малюнком 173 знайдіть градусну міру кута x .

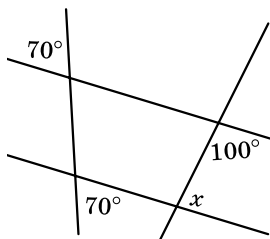
А) 80° ; Б) 70° ; В) 100° ; Г) 110° .

10. На малюнку 174 $\angle AOC = \angle BOD$, $\angle COK = \angle DOK$. Знайдіть, якщо це можливо, градусну міру кута AOK .

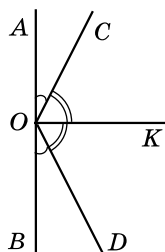
- А) знайти неможливо;
 Б) 80° ;
 В) 90° ;
 Г) 100° .



Мал. 172



Мал. 173

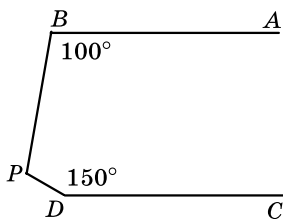


Мал. 174

11. Прямі AB і CD паралельні (мал. 175).

Тоді $BPD = \dots$

- А) 100° ;
 Б) 110° ;
 В) 130° ;
 Г) 150° .



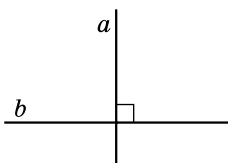
Мал. 175

12. Один із двох даних кутів на 60° більший за другий, а суміжні з ними кути відносяться як $5:8$. Знайдіть менший із даних кутів.

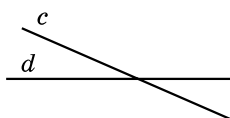
- А) 60° ;
 Б) 80° ;
 В) 40° ;
 Г) 20° .

Завдання для перевірки знань № 2 (§7—§10)

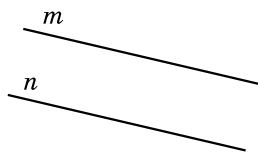
1. На якому з малюнків 176–178 зображено паралельні прямі, а на якому — перпендикулярні? Виконайте відповідні записи.



Мал. 176



Мал. 177



Мал. 178

2. Накресліть пряму a та позначте точку N , яка їй не належить. За допомогою косинця і лінійки через точку N проведіть:

1) пряму b , перпендикулярну до прямої a ;

2) пряму c , перпендикулярну до прямої b .

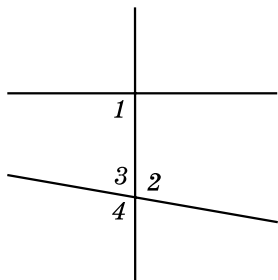
3. За малюнком 179 укажіть, як називають пару кутів:

1) 1 і 2; 2) 1 і 3; 3) 1 і 4?

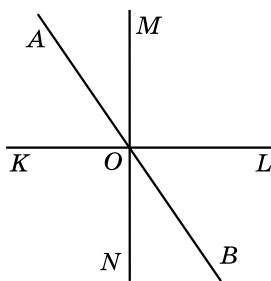
4. Прямі AB , KL і MN перетинаються в точці O (мал. 180). Чи перпендикулярні прямі KL і MN , якщо

1) $\angle KOA = 70^\circ$, $\angle AOM = 19^\circ$;

2) $\angle NOB = 21^\circ$, $\angle KOB = 111^\circ$?



Мал. 179



Мал. 180

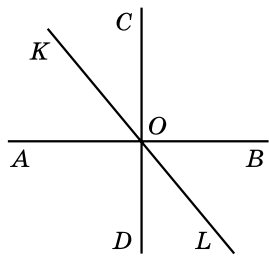
5. Накресліть промені AB і CD та відрізок MN так, щоб промінь AB був паралельний відрізку MN і перпендикулярний до променя CD .

6. Один з кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 78° . Знайдіть градусні міри решти семи кутів.

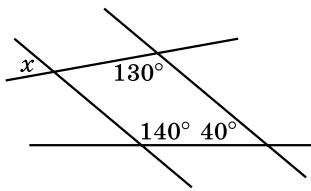
7. Прямі AB , CD і KL перетинаються в точці O , причому $AB \perp CD$ (мал. 181). Знайдіть $\angle AOK$, якщо $\angle DOL = 38^\circ$.

8. За малюнком 182 знайдіть градусну міру кута x .

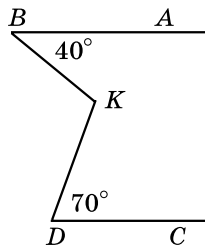
9. На малюнку 183 $AB \parallel CD$. Знайдіть $\angle BKD$.



Мал. 181



Мал. 182



Мал. 183

Додаткові вправи

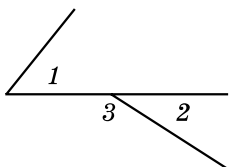
- 3** 10. Знайдіть градусну міру кожного з двох внутрішніх односторонніх кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, якщо один з них у 4 рази більший за другий.
- 4** 11. Прямая t є січною для прямих c і d . Чотири з восьми кутів, що утворилися, дорівнюють по 50° , а решта — по 130° . Чи можна стверджувати, що прямі c і d між собою паралельні?



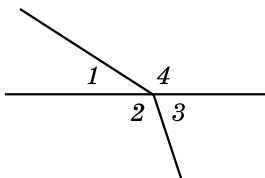
Вправи для повторення розділу 2

До § 5

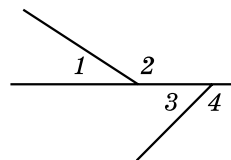
- 1** 226. Серед кутів, які зображено на малюнках 184–186, укажіть ті, що є суміжними.



Мал. 184



Мал. 185



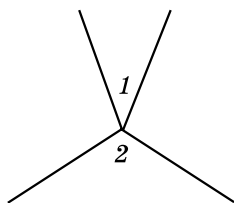
Мал. 186

- 2** 227. 1) Чи можна, використовуючи лише олівець та лінійку, побудувати кут, суміжний з даним?
2) Скільки таких кутів можна побудувати?
228. Кут ABC менший від кута MNP . У якого з кутів буде більшим суміжний кут? Відповідь обґрунтуйте.
- 3** 229. Знайдіть суміжні кути, якщо їх градусні міри відносяться як 3 : 7.
230. Один із суміжних кутів складає 20 % від іншого. Знайдіть ці кути.
- 4** 231. Один із суміжних кутів на 20 % менший від іншого. Знайдіть ці кути.
232. Бісектриса кута ABC утворює зі стороною кут, удвічі більший за кут, суміжний з кутом ABC . Знайдіть $\angle ABC$.

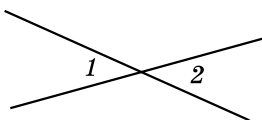
До § 6

- 1** 233. Який предмет домашнього вжитку дає уявлення про вертикальні кути?

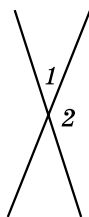
234. Чи є кути 1 і 2 вертикальними (мал. 187–191)?



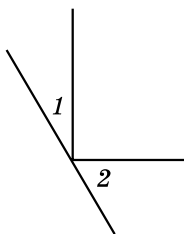
Мал. 187



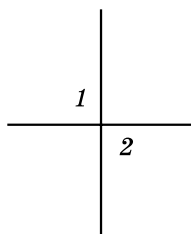
Мал. 188



Мал. 189



Мал. 190



Мал. 191

235. Чи є правильними твердження:

- 1) якщо два кути рівні, то вони вертикальні;
- 2) якщо два кути зі спільною вершиною рівні, то вони вертикальні;
- 3) для кожного кута, меншого від розгорнутого, можна добувати тільки один вертикальний кут;
- 4) для кожного кута, меншого від розгорнутого, можна добувати тільки один суміжний кут?

236. При перетині двох прямих утворилося чотири кути. Чи можуть деякі два з них дорівнювати:

- 1) 5° і 175° ; 2) 15° і 19° ; 3) 27° і 154° ; 4) 3° і 3° ?

237. Один з кутів, що утворилися при перетині двох прямих, на 48° більший за інший. Знайдіть кут між прямими.

238. Один з кутів, що утворилися при перетині двох прямих, дорівнює сумі двох суміжних з ним. Знайдіть цей кут.

239. Знайдіть градусну міру кожного із чотирьох кутів, що утворилися при перетині двох прямих, якщо сума двох із цих кутів:

- 1) менша від суми двох інших у 4 рази;
- 2) більша за суму двох інших на 160° .

240. Знайдіть кут між прямими, які перетинаються, якщо один з кутів, що утворилися, у 8 разів менший від суми трьох інших кутів.

До § 7

241. Накресліть пряму a та позначте точку M , що їй не належить. За допомогою косинця і лінійки проведіть з точки M перпендикуляр до прямої a . Виміряйте відстань від точки M до прямої a .

242. Накресліть гострий кут KAM , позначте на стороні AK точку B . Побудуйте за допомогою косинця і лінійки пряму, що проходить через точку B перпендикулярно до AK .

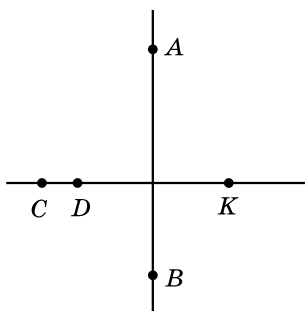
243. Накресліть промінь AB і відрізок KP так, щоб вони були перпендикулярними і не перетиналися.

244. Назвіть усі пари перпендикулярних між собою відрізків на малюнку 192. Виконайте відповідні записи.

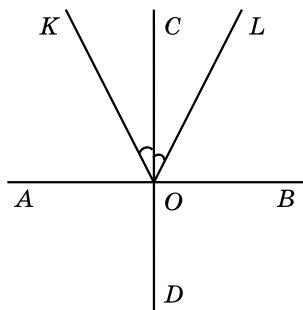
245. На малюнку 193: $AB \perp CD$, $\angle KOC = \angle COL$.

1) Чи правильно, що $\angle AOK = \angle LOB$, $\angle AOL = \angle KOV$?

2) Порівняйте $\angle KOV$ і $\angle AOK$.



Мал. 192



Мал. 193

246. 1) Чи можуть два гострих кути бути рівними, якщо в них одна сторона спільна, а дві інші — перпендикулярні між собою?

2) Чи можуть два тупих кути бути рівними, якщо в них одна сторона спільна, а дві інші — перпендикулярні між собою?

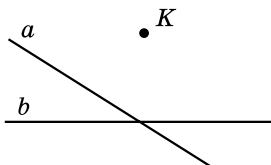
247. Як, використовуючи шаблон кута в 6° , побудувати взаємно перпендикулярні прямі?

248. Доведіть, що коли бісектриси кутів ABC і CBD взаємно перпендикулярні, то точки A , B і D лежать на одній прямій.

До § 8

249. Накресліть відрізки AB і CD так, щоб вони були паралельними між собою.

250. На малюнку 194 зображено дві прямі a і b , що перетинаються, та точку K , що не належить жодній з них. Проведіть через точку K прямі, паралельні прямим a і b .



Мал. 194

251. 1) Прямі a і b не перетинаються.

Чи можна стверджувати, що вони між собою паралельні?

2) Відрізки AB і CD не перетинаються. Чи можна стверджувати, що вони паралельні?

3) Промені MN і KL не перетинаються. Чи можна стверджувати, що вони паралельні?

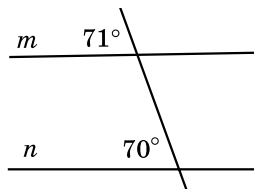
252. Дано пряму a і точку K , що їй не належить. Через точку K провели дві прямі b і c . Як можуть розміщуватися ці прямі відносно прямої a ? Розгляньте всі випадки та виконайте до них малюнки.

253. Прямі a і b — паралельні, а прямі b і n — перетинаються. Пряма c паралельна прямій b . Доведіть, що пряма c перетинає пряму n і паралельна прямій a .

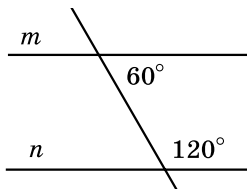
До § 9

254. Накресліть дві прямі та їх січну. Пронумеруйте кути, що утворилися, числами від 1 до 8. Які із цих кутів будуть внутрішніми односторонніми, які — внутрішніми різносторонніми, а які — відповідними?

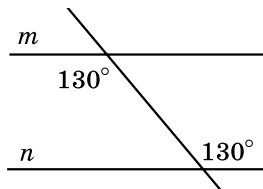
255. Чи є прямі m і n паралельними на малюнках 195–198?



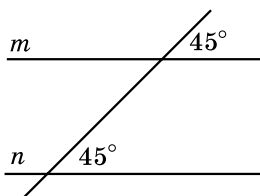
Мал. 195



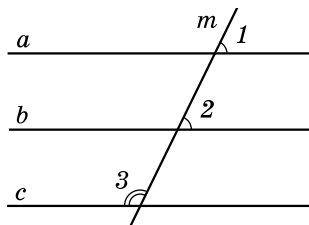
Мал. 196



Мал. 197



Мал. 198

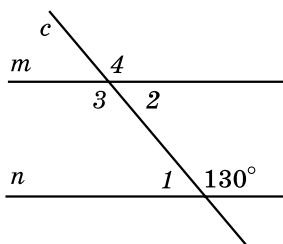


Мал. 199

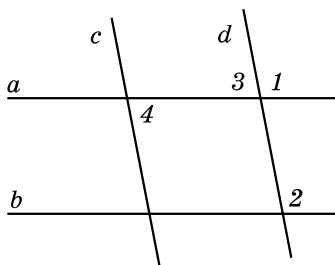
- 256.** При перетині прямих a і b січною c утворилося два рівних гострих кутів. Чи можна стверджувати, що $a \parallel b$?
- 257.** На малюнку 199 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$. Чи є прямі a і c паралельними між собою?

До § 10

- 258.** На малюнку 200 прямі m і n — паралельні, c — січна. Знайдіть градусні міри кутів 1, 2, 3, 4.
- 259.** Дано: $a \parallel b$, $b \parallel c$, $c \parallel d$. Доведіть, що $a \parallel d$.
- 260.** Знайдіть градусну міру кожного з двох внутрішніх односторонніх кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, якщо один з них складає 80 % від другого.
- 261.** На малюнку 201 $a \parallel b$, $c \parallel d$, $\angle 1 = 100^\circ$. Знайдіть градусні міри кутів 2, 3, 4.

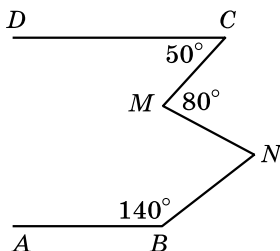


Мал. 200



Мал. 201

- 262.** Один з внутрішніх односторонніх кутів, що утворилися при перетині паралельних прямих січною, дорівнює 72° . Знайдіть кут між бісектрисами внутрішніх односторонніх кутів.
- 263.** Прямі AB і CD паралельні (мал. 202). Знайдіть $\angle MNB$.



Мал. 202

Розділ

3

ТРИКУТНИКИ. ОЗНАКИ РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

У цьому розділі ви:

- **пригадаєте** поняття трикутника і його основних елементів та види трикутників;
- **дізнаєтеся** про висоту, медіану і бісектрису трикутника, нерівність трикутника та співвідношення між сторонами і кутами трикутника; суму кутів трикутника;
- **навчитесь** доводити рівність трикутників на основі ознак; застосовувати властивість рівнобедреного та прямокутного трикутників до розв'язування задач.



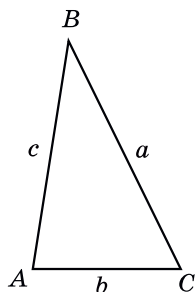
11. ТРИКУТНИК І ЙОГО ЕЛЕМЕНТИ

Позначимо три точки A , B і C , які не лежать на одній прямій, і сполучимо їх відрізками (мал. 203).



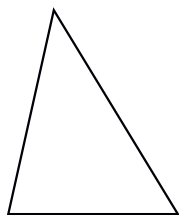
Трикутником називають фігуру, яка складається з трьох точок, що не лежать на одній прямій, і трьох відрізків, які сполучають ці точки.

Точки називають **вершинами** трикутника, а відрізки — його **сторонами**. На мал. 203 зображено трикутник ABC . Його вершинами є точки A , B і C , а сторонами — відрізки AB , BC і CA . Замість слова «трикутник» в математиці можна вживати символ Δ , тоді запис ΔABC читають так: «трикутник ABC ». Назва трикутника складається з букв, якими позначено його вершини, і записувати їх можна в будь-якому порядку: ΔACB ; ΔBCA ; ΔCAB тощо.

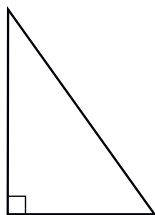


Мал. 203

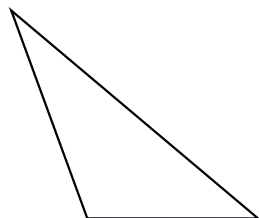
Кутами трикутника ABC називають кути BAC , ABC і BCA . Якщо з вершини трикутника не проведено жодних інших ліній, окрім його сторін, то кути трикутника можна називати лише їх вершиною: однією буквою $\angle A$, $\angle B$ і $\angle C$. Сторони трикутника також можна позначати малими буквами латинського алфавіту a , b і c відповідно до позначення протилежних їм вершин.



Мал. 204



Мал. 205



Мал. 206

Кожний трикутник має три вершини, три сторони і три кути, які ще називають *елементами трикутника*.

Суму довжин усіх сторін трикутника називають його **периметром**. Периметр позначають буквою P , наприклад, периметр трикутника ABC можна позначити так: $P_{\triangle ABC}$. Маємо:

$$P_{\triangle ABC} = AB + BC + CA.$$

Задача. Одна зі сторін трикутника на 7 см менша за другу і вдвічі менша за третю. Знайти сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 47 см.

Р о з в ' я з а н н я. Нехай довжина найменшої сторони трикутника дорівнює x см, тоді довжина другої — $(x + 7)$ см, а третьої — $2x$ см. Оскільки $P_{\triangle} = 47$ см, маємо рівняння:

$$x + (x + 7) + 2x = 47.$$

Розв'язавши це рівняння, отримаємо $x = 10$ (см).

Отже, довжина однієї сторони трикутника дорівнює 10 см, другої — 17 см, третьої — 20 см.

В і д п о в і д ь. 10 см, 17 см, 20 см.

Залежно від величини кутів розрізняють такі *види трикутників*: **гострокутні**, **прямокутні**, **тупокутні**. Гострокутні трикутники — це ті, у яких всі кути гострі (мал. 204), прямокутні — це ті, що мають прямий кут (мал. 205), тупокутні — це ті, що мають тупий кут (мал. 206).

А ще раніше...

Трикутник вважався найпростішою замкненою прямолінійною фігурою. Властивості цієї фігури людство вивчало та використовувало у практичній діяльності ще з давніх-давен.

Так, наприклад, у будівництві здавна використовують властивість жорсткості трикутника для укріплення різноманітних будівель, конструкцій тощо.

Зображення трикутників і задач, пов'язаних із трикутниками, дослідники знаходили в єгипетських папірусах, стародавніх індійських книгах, інших документах давнини.

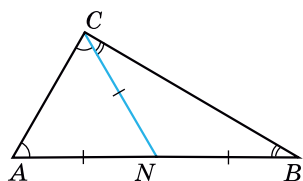
У Давній Греції ще в VII ст. до н.е. були відомі деякі важливі факти, пов'язані з трикутником. Так, наприклад, Фалес довів, що трикутник можна однозначно задати стороною і двома прилеглими до неї кутами.

Найповніше вчення про трикутники виклав Евклід у першій книжці «Основ».



Задача 3. Медіана CN трикутника ABC дорівнює половині сторони AB . Доведіть, що в трикутнику ABC $\angle C = 90^\circ$.

Д о в е д е н н я (мал. 297). Оскільки $CN = \frac{AB}{2}$ і N — середина відрізка AB , то $CN = AN = BN$. Отже, трикутники ANC і CNB — рівнобедрені. Тому



Мал. 297

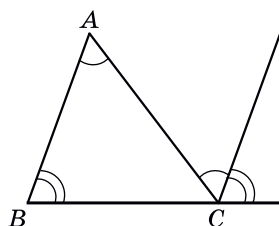
Тому $\angle A = \angle ACN$, $\angle B = \angle BCN$. Таким чином, $\angle C = \angle A + \angle B$. Але ж $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$. Тому $\angle A + \angle B = 180^\circ - \angle C$. Отже, $\angle C = 180^\circ - \angle C$. Звідси $\angle C = 90^\circ$. Трикутник ABC — прямокутний з прямим кутом C , що й треба було довести. ▲

А ще раніше...

Властивість про суму кутів трикутника експериментальним шляхом було встановлено в Давньому Єгипті, проте відомості про різні способи доведення цієї теореми належать до більш пізніх часів.

Доведення, яке ми розглянули вище, є в коментарях Прокла до «Основ» Евкліда. Він же стверджував, що це доведення було відоме ще учням школи Піфагора (піфагорійцям) у V ст. до н.е.

Сам же Евклід у першій книжці «Основ» запропонував доведення теореми про суму кутів трикутника у спосіб, який можна побачити на малюнку 298 (виконайте це доведення самостійно).



Мал. 298



Сформулюйте і доведіть теорему про суму кутів трикутника. ● Сформулюйте і доведіть наслідок із цієї теореми.

392. (Усно) Дано трикутник PLK . Знайдіть значення суми $\angle P + \angle L + \angle K$?

393. Чи існує трикутник з кутами:

- 1) 40° , 50° і 70° ; 2) 80° , 30° і 70° ?

394. Чи існує трикутник з кутами:

- 1) 20° , 100° і 80° ; 2) 40° , 50° і 90° ?

ЗАДАЧІ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

Розділ 1

Елементарні геометричні фігури та їх властивості

807. Дано відрізок AB . Позначте всі такі точки K на відрізку AB , для яких виконується співвідношення:

- 1) $BK = 3AK$; 2) $BK \geq 3AK$.

808. Градусна міра кута AOB дорівнює 120° . Побудуйте промінь OK , який проходить між сторонами даного кута так, що $3\angle AOK - 2\angle KOB = 10^\circ$.

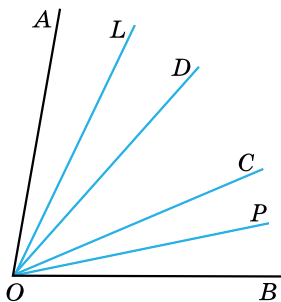
809. Скільки різних прямих можна провести через чотири точки? Розгляньте всі можливі випадки. До кожного зробіть малюнок.

810. Скільки різних точок перетину можуть мати чотири прямі, кожна дві з яких перетинаються? Розгляньте всі можливі випадки. До кожного виконайте малюнок.

811. Точки A , B і C належать прямій a , причому точка B лежить між точками A і C . Відомо, що $AC < 1,9AB$. Порівняйте довжини відрізків BC і AB .

812. На малюнку 448 $\angle AOC = \angle BOD$. OL і OP — бісектриси кутів AOD і COB . Порівняйте кути:

- 1) AOL і COP ; 2) LOP і AOC .



Мал. 448

Розділ 2

Взаємне розміщення прямих на площині

813. Дано п'ять прямих, кожна дві з яких перетинаються. Відомо, що через точку перетину будь-яких двох з них проходить принаймні ще одна з даних прямих. Доведіть, що всі ці прямі проходять через одну точку.

814. Чи можна градусні міри двох суміжних кутів записати:

- 1) тільки непарними цифрами;
2) тільки парними цифрами?

815. Знайдіть суміжні кути, якщо:

- 1) градусні міри цих кутів відносяться як $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$;
2) половина одного з них складає 40 % від іншого.

816. У якому з випадків утвориться більше пар вертикальних кутів: при перетині трьох прямих в одній точці чи в трьох точках?

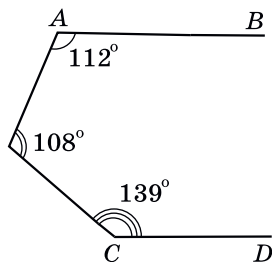
817. Знайдіть кут між двома прямими, що перетинаються, якщо сума $\frac{1}{3}$ одного з утворених кутів і $\frac{5}{6}$ іншого дорівнює 90° .

818. Через вершину тупого кута, градусна міра якого дорівнює α , проведено промені, перпендикулярні до сторін кута. Промені утворили гострий кут β . Доведіть, що $\alpha + \beta = 180^\circ$.

819. Чи є паралельними прямі AB і CD (мал. 449)?

820. Чи можна, використовуючи шаблон кута 27° , побудувати перпендикулярні прямі?

821. Знайдіть градусну міру кожного з кутів, утворених при перетині двох прямих, якщо один з них у 2,6 раза менший від суми трьох інших.



Мал. 449

Розділ 3

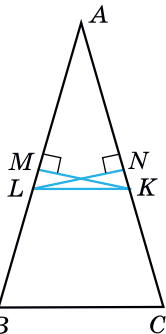
Трикутники. Ознаки рівності трикутників

822. Периметр трикутника на 10 см більший за одну із сторін, на 13 см — за другу і на 9 см — за третю. Знайдіть периметр трикутника.

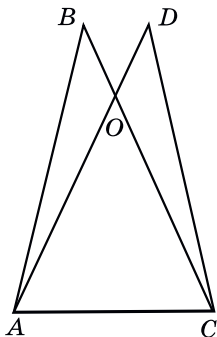
823. Точки M і N — середини сторін AB і AC трикутника ABC , $AB = AC$, $MK \perp AB$, $NL \perp AC$ (мал. 450). Доведіть, що $\angle NLK = \angle MKL$.

824. Прямі, що містять бісектриси зовнішніх кутів при вершинах B і C трикутника ABC , перетинаються в точці O . Знайдіть $\angle BOC$, якщо $\angle A = \alpha$.

825. На малюнку 451 $\triangle ABC = \triangle CDA$, $AB = CD = 40$ см, $BO = DO = 10$ см. Периметр трикутника ABC дорівнює 100 см. Знайдіть периметр трикутника AOC , якщо AO більша за AC на 30 см.



Мал. 450



Мал. 451

ВІДПОВІДІ, ВКАЗІВКИ ТА РОЗВ'ЯЗАННЯ

Розділ 1

9. 2) 6; 3) 16. 10. 2) 3; 3) 7. 12. 6051. 26. 17 см. 27. 6 см. 28. 1) $AC = 1,9$ дм; $BC = 5,7$ дм; 2) $AC = 5,2$ дм; $BC = 2,4$ дм. 29. 1) $CM = 4,5$ см; $DM = 3,9$ см; 2) $CM = 2,1$ см; $DM = 6,3$ см. 30. 10,1 см або 0,3 см; два розв'язки. 31. 9,7 см або 4,7 см; два розв'язки. 49. 1) 180° ; 2) 90° ; 3) 30° ; 4) 120° . 50. 1) 90° ; 2) 180° ; 3) 150° ; 4) 60° . 51. 20° . 52. 112° . 53. 76° . 54. 131° . 55. $\angle PQB = 24^\circ$; $\angle MQP = 96^\circ$. 56. $\angle CAN = 36^\circ$; $\angle MAC = 50^\circ$. 57. 60° . 58. 60° . 68. 1) Два, або три, або чотири. 2) Від двох до $n + 1$ частин. 70. 8 см. 72. $\frac{a}{2}$ см. 77. 1) 90° ; 42° ; 138° ; 2) $30'$; 3° ; 20° . 78. 1) 30° ; 2) 148° . 79. 1) 70° ; 2) 146° . 80. $\angle AOM = 72^\circ$; $\angle MOB = 96^\circ$.

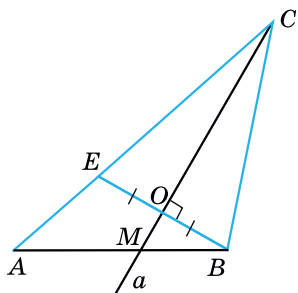
Розділ 2

94. 81° і 99° . 95. 45° і 135° . 96. 54° і 126° . 97. $\angle A = 100^\circ$; $\angle B = 75^\circ$. 98. 90° . 99. 40° і 80° . 100. 80° і 60° . 101. 72° і 108° або 60° і 120° . 104. 1) Кут; 2) пряма; 3) Евклід; 4) геометрія. 113. 62° . 117. 1) Усі по 90° ; 2) 89° ; 91° ; 89° ; 91° . 118. 1) 8° ; 172° ; 8° ; 172° ; 2) усі по 90° . 119. 1) 81° ; 2) 67° . 120. 60° . 121. 100° . 122. 50° . 123. 180° . 125. 18 см. 140. 1) 65° ; 2) 60° . 141. 1) 50° ; 2) 127° . 144. 140° . 145. 110° . 150. 72° і 108° . 160. 3) 60° . 161. 3) 50° . 167. 36° . 168. Ні. 179. $a \parallel b$. 180. $b \parallel c$. 187. 1) 190° ; 2) 170° ; 3) 170° . 188. 1) 200° ; 2) 160° ; 3) 200° . 189. Ні. 190. Так. 191. Ні. 192. Ні. 196. 100° . 197. Так. 212. 1) 82° і 98° ; 2) 45° і 135° ; 3) 75° і 105° . 213. 1) 86° і 94° ; 2) 36° і 144° ; 3) 100° і 80° . 214. $x = 70^\circ$ на малюнку 155; $x = 65^\circ$ на малюнку 156; $x = 129^\circ$ на малюнку 157. 215. $x = 50^\circ$ на малюнку 158; $x = 110^\circ$ на малюнку 159. 216. Ні. 217. Чотири кути по 40° і чотири кути по 140° . 218. Чотири кути по 32° і чотири кути по 148° . 219. 130° . 220. 100° . 224. Франко. 229. 54° і 126° . 230. 30° і 150° . 231. 80° і 100° . 232. 144° . 237. 66° . 238. 120° . 239. 1) 36° ; 144° ; 36° ; 144° ; 2) 50° ; 130° ; 50° ; 130° . 240. 40° . 246. 1) Так; 2) так. 256. Ні. 257. Так. 260. 80° і 100° . 262. 90° . 263. 70° .

Розділ 3

272. 5 см; 15 см; 12 см. 273. 12 дм; 10 дм; 18 дм. 276. 12 дм; 16 дм; 24 дм. 277. 16 см; 24 см; 32 см. 279. 19 см. 281. 141° . 282. 5 чотирикутників. 292. 1) Ні; 2) ні. 293. Так, $AB = BC$. 294. Так, $\angle N = \angle K$. 295. 15 см. 296. 8 см. 297. 16 см. 298. 30° ; 60° ; 90° . 319. В к а з і в к а. Нехай точка O — точка перетину AB і MN . Доведіть, що $\triangle AOM = \triangle AON$. 339. 4 см; 4 см; 6 см. 340. 12 см; 16 см; 16 см.

849. В к а з і в к а. Нехай пряма a перетинає AB у точці M . Побудуйте відрізок $BE \perp a$, $BO = OE$ (мал. 459). Шукана точка C є точкою перетину прямих a і AE . **850.** Жодного; один або два розв'язки.



Мал. 459

**ВІДПОВІДІ ДО ЗАВДАНЬ У ТЕСТОВІЙ ФОРМІ
«ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА»**

Завдання № роботи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	В	А	Б	Б	Г	Г	А	В	Г	В	А	Г
2	Г	Б	Г	Б	А	В	В	Б	А	В	Б	Г
3	Б	Б	Б	Г	В	В	Г	А	А	Г	Г	Б
4	В	А	В	Б	Г	Г	Б	Г	А	Б	А	В
5	Б	В	Г	А	Б	Б	А	Б	В	В	А	В

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Аксіома паралельності 41

Аксіоми геометрії 25

Бісектриса кута 18

– трикутника 88

Бічні сторони рівнобедреного трикутника 82

Вершина кута 16

– трикутника 70

Взаємне розміщення двох кіл 145

Види трикутників 71, 82

Висновок теореми 26

Висота трикутника 88

Відповідні кути 45

Відрізок 11

Відстань від точки до прямої 37

– між кінцями відрізка 13

– – паралельними прямими 159

Властивість бісектриси кута 137

– – рівнобедреного трикутника 89

– відповідних кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною 51

– відрізків дотичних, проведених з однієї точки 135

– внутрішніх односторонніх кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною 53

– внутрішніх різносторонніх кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною 53

– дотичної 133

– зовнішнього кута трикутника 104

– кутів рівнобедреного трикутника 83

Властивість паралельних прямих 51

– серединного перпендикуляра до відрізка 141

Властивості елементів кола 128, 129

– прямокутних трикутників 108, 109, 110

Внутрішні односторонні кути 45

– різносторонні кути 45

Внутрішня область кута 16

Геометрична фігура 7

Геометричне місце точок 157

Геометрія 6

Гіпотенуза 108

Градус 17

Діаметр кола 127

– круга 130

Доведення теореми 26

Дотик двох кіл 146

– – – внутрішній 146

– – – зовнішній 146

Дотична 133

Засічка 150

Зовнішній кут трикутника 104

Зовнішня область кута 16

Інцентр трикутника 88

Катет 108

Кінці відрізка 11

Кола концентричні 145

Кола, що перетинаються 146

Коло 127

– вписане в трикутник 137

– описане навколо трикутника 141

Круг 130

Кут 16

– гострий 18

– між прямими 30

– прямий 18

З М І С Т

Юні друзі!	3
Шановні вчителі!	5
Шановні батьки!	5

Розділ 1. Елементарні геометричні фігури та їх властивості

§ 1. Геометричні фігури. Точка, пряма, промінь	6
§ 2. Відрізок. Вимірювання відрізків. Відстань між двома точками	11
§ 3. Кут. Вимірювання кутів. Бісектриса кута	16
Вправи для повторення розділу 1	22

Розділ 2. Взаємне розміщення прямих на площині

§ 4. Аксиоми, теореми, означення	25
§ 5. Суміжні кути	27
§ 6. Вертикальні кути. Кут між двома прямими, що перетинаються.	29
<i>Домашня самостійна робота № 1 (§ 1 – § 6)</i>	33
<i>Завдання для перевірки знань № 1 (§ 1 – § 6)</i>	34
§ 7. Перпендикулярні прямі. Перпендикуляр. Відстань від точки до прямої.	35
§ 8. Паралельні прямі	40
§ 9. Кути, утворені при перетині двох прямих січною. Ознаки паралельності прямих	45
§ 10. Властивість паралельних прямих. Властивості кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною	51
<i>Домашня самостійна робота № 2 (§ 7 – § 10)</i>	57
<i>Завдання для перевірки знань № 2 (§ 7 – § 10)</i>	59
Вправи для повторення розділу 2	61
Михайло Кравчук — відомий у світі й незнаний в Україні	66

Розділ 3. Трикутники. Ознаки рівності трикутників

§ 11. Трикутник і його елементи	70
§ 12. Рівність геометричних фігур	73
§ 13. Перша та друга ознаки рівності трикутників	76
§ 14. Рівнобедрений трикутник	82

§ 15. Медіана, бісектриса і висота трикутника. Властивість бісектриси рівнобедреного трикутника	87
§ 16. Третя ознака рівності трикутників	92
<i>Домашня самостійна робота № 3 (§ 11 – § 16)</i>	96
<i>Завдання для перевірки знань № 3 (§ 11 – § 16)</i>	97
§ 17. Сума кутів трикутника	98
§ 18. Зовнішній кут трикутника та його властивості	104
§ 19. Прямокутні трикутники. Властивості та ознаки рівності прямокутних трикутників	108
§ 20. Нерівність трикутника	115
<i>Домашня самостійна робота № 4 (§ 17 – § 20)</i>	117
<i>Завдання для перевірки знань № 4 (§ 17 – § 20)</i>	118
Вправи для повторення розділу 3	119

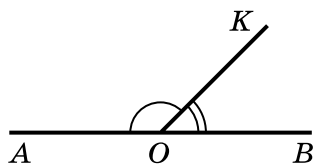
Розділ 4. Коло і круг. Геометричні побудови

§ 21. Коло. Круг	127
§ 22. Дотична до кола, її властивості	133
§ 23. Коло, вписане в трикутник	137
§ 24. Коло, описане навколо трикутника	141
§ 25. Взаємне розміщення двох кіл	145
§ 26. Задачі на побудову та їх розв'язування	149
§ 27. Геометричне місце точок	157
<i>Домашня самостійна робота № 5 (§ 21 – § 27)</i>	162
<i>Завдання для перевірки знань № 5 (§ 21 – § 27)</i>	163
Вправи для повторення розділу 4	164
Завдання для перевірки знань за курс геометрії 7 класу	169
Задачі підвищеної складності	170
Відповіді, вказівки та розв'язання	174
Предметний покажчик	179

СУМІЖНІ КУТИ

$\angle AOK$ і $\angle KOB$ – суміжні

$$\angle AOK + \angle KOB = 180^\circ$$



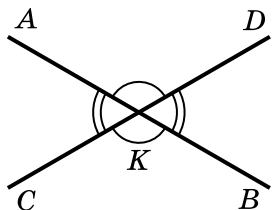
ВЕРТИКАЛЬНІ КУТИ

$\angle AKC$ і $\angle DKB$ – вертикальні

$\angle AKD$ і $\angle CKB$ – вертикальні

$$\angle AKC = \angle DKB$$

$$\angle AKD = \angle CKB$$



ОЗНАКИ ПАРАЛЕЛЬНОСТІ ПРЯМИХ

$a \parallel b$, якщо

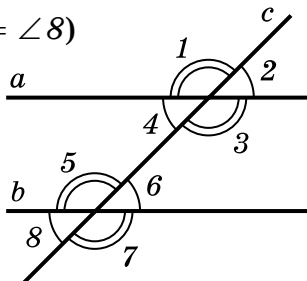
$$\angle 1 = \angle 5 \quad (\angle 2 = \angle 6, \angle 3 = \angle 7, \angle 4 = \angle 8)$$

або

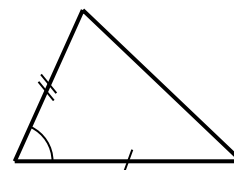
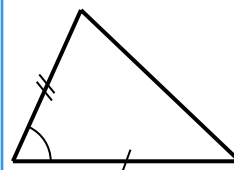
$$\angle 3 = \angle 5 \quad (\angle 4 = \angle 6)$$

або

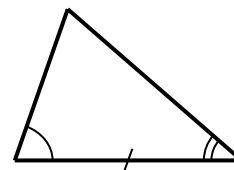
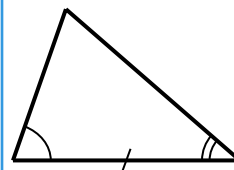
$$\angle 3 + \angle 6 = 180^\circ \quad (\angle 4 + \angle 5 = 180^\circ)$$



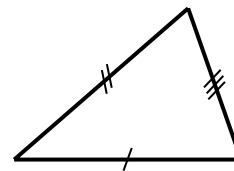
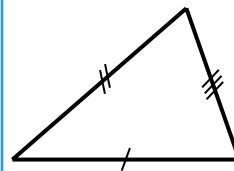
ОЗНАКИ РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ



1. За двома сторонами і кутом між ними



2. За стороною і прилеглими до неї кутами



3. За трьома сторонами

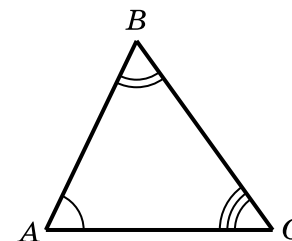
ТРИКУТНИК

$$P = AB + BC + CA$$

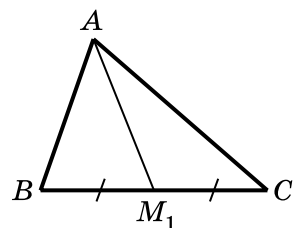
$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$|AB - BC| < AC < AB + BC$$

(нерівність трикутника)

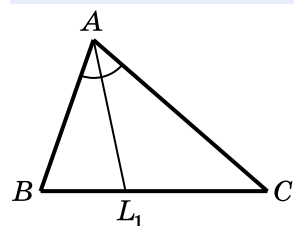


МЕДІАНА, БІСЕКТРИСА І ВИСОТА ТРИКУТНИКА



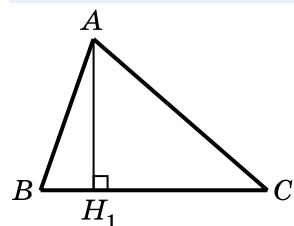
$$BM_1 = M_1C$$

AM_1 – медіана $\triangle ABC$



$$\angle BAL_1 = \angle CAL_1$$

AL_1 – бісектриса $\triangle ABC$

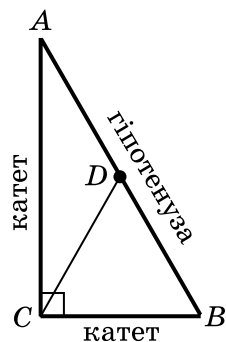


$$AH_1 \perp BC$$

AH_1 – висота $\triangle ABC$

ПРЯМОКУТНИЙ ТРИКУТНИК

- $\angle A + \angle B = 90^\circ$
- $AB > AC, AB > BC$
- Якщо $\angle A = 30^\circ$, то $BC = \frac{AB}{2}$
- Якщо $BC = \frac{AB}{2}$, то $\angle A = 30^\circ$
- Якщо CD – медіана, то $CD = \frac{AB}{2}$



ЛАТИНСЬКИЙ АЛФАВІТ

Дру-ковані букви	Руко-писні букви	Назва букв	Дру-ковані букви	Руко-писні букви	Назва букв
Aa	<i>Aa</i>	а	Nn	<i>Nn</i>	ен
Bb	<i>Bb</i>	бе	Oo	<i>Oo</i>	о
Cc	<i>Cc</i>	це	Pp	<i>Pp</i>	пе
Dd	<i>Dd</i>	де	Qq	<i>Qq</i>	ку
Ee	<i>Ee</i>	е	Rr	<i>Rr</i>	ер
Ff	<i>Ff</i>	еф	Ss	<i>Ss</i>	ес
Gg	<i>Gg</i>	же	Tt	<i>Tt</i>	те
Hh	<i>Hh</i>	аш	Uu	<i>Uu</i>	у
Ii	<i>Ii</i>	і	Vv	<i>Vv</i>	ве
Jj	<i>Jj</i>	йот (жі)	Ww	<i>Ww</i>	дубль-ве
Kk	<i>Kk</i>	ка	Xx	<i>Xx</i>	ікс
Ll	<i>Ll</i>	ель	Yy	<i>Yy</i>	ігрек
Mm	<i>Mm</i>	ем	Zz	<i>Zz</i>	зет